目　录

前 言

场论在物理、力学、电工理论、无线电、化学、生物、计算机科学等许多科技部门都有着广泛的应用，是数学物理的一个分支。

场论是研究场的表征量的变化特性及其数学物理结构为主题的数学理论与方法。

本书目的是想比较系统而严格地阐述场的数学理论、方法及其应用。所以，在安排和阐述内容时，就想在理论上和应用方面构成一个体系。

因此，在写作过程中注意到：(1)在基本概念方面，希望采取最能表现其本质和客观属性的一种定义，同时讲明逻辑关系、实际背景、物理解释与使用；(2)理论推导与计算，可以帮助人们正确去解释和认识自然现象的量变关系、变化结果、预测未来，通过对每一命题的证明和列举的许多例题，希望能从不同角度阐明这一点；(3)场论应用虽然具有广泛性，但要系统地叙述各个领域的应用是有困难的，且不便于深入。所以，有侧重地选择典型现象，通过模型的建立，希望能阐明正确使用数学方法，可以促进达到一定的物理目的；(4)便于自学，涉及的到许多数学物理知识，几乎自给自足。如上所述，不尽全面，但这种考虑和叙述方式也许还是一种新尝试，有待进一步改进和提高。

本书从着手写作到定稿经过多次反复修改，征求意见。得到李国平教授、李森林教授、肖伊莘教授、周怀生教授、彭肇

凡副教授及其他许多同志的帮助和鼓励。最后由李森林教授、李维副教授、陆尚强副教授审阅。何灿芝同志等阅读了手稿。作者对他们表示衷心的感谢！

由于水平所限，尽管竭力而为，书中缺点错误仍难免，恳请批评指正。

作　者

一九八〇年九月于湖南大学

第一章　若干预备知识综述

本章为以后几章提供必要的预备知识。

§1　矢量及其运算

矢量方法，在科学技术中是基础性的数学工具。

本节，简要地综述矢量的运算法则

1.1　矢量概念　矢量是与数量（即只有数值大小的量，又称纯量或标量）不同的一种量；例如，作用力、物体运动的速度、电场强度、磁场强度等，就是属于这样的量。

定义　既有数值大小又有确定方向的量，称为矢量（或向量），用$\vec{A}$，$\vec{a}$或用黑体字$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{a}$等来表示。

矢量在几何上表示一有向线段，有向线段的起点P和终点M分别称为矢量的起点和终点，此时，记$\vec{A}=\overrightarrow{PM}$（如图1—1）。

矢量$\vec{A}$数值的大小是指该有向线段的长度，称为矢量$\vec{A}$的模，记为$|\vec{A}|$。所以，矢量的模是一个非负数。

当矢量的模为1时，则该矢量称为单位矢量，当矢量的模为零时，则该矢量称为零矢量，简单地记作0；显然，零矢量的起点与终点重合，其方向是不定的。

设t为参度量，如果每给定t的一个数值，就有一个确定的矢量与之对应，则这种矢量称为t的矢量函数，记作$\vec{A}=\vec{A}(t)$

当矢量的起点固定时，让矢量的终点变动，则终点的运动轨迹，称为矢量的矢端曲线。设矢量$\vec{A}$的起点为P，终点为M，于

是，矢量$\vec{A}$的矢端曲线，是矢量终点位置的函数，即，$\vec{A} = \vec{A}(M)$（如图1—2）。



图1—1

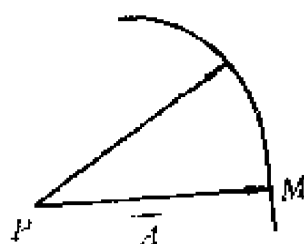


图1—2

1.2 矢量运算法则 设非零矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，我们规定：

$\vec{a} = \vec{b}$，表示$\vec{a}$，$\vec{b}$的方向相同，模相等。

$\vec{a} = -\vec{b}$，表示$\vec{a}$，$\vec{b}$的方向相反，模相等。

$\vec{a} + \vec{b}$，表示$\vec{a}$与$\vec{b}$之和，是以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边（设$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行），作平行四边形$ABDC$，则对角线矢量$\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$（如图1—3）。这称为矢量加法的平行四边形法则。因为$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \vec{b}$，故$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD}$，这样，又得矢量加法的三角形法则：在矢量$\vec{a}$的终点作一矢量等于$\vec{b}$，则由$\vec{a}$的起点到$\vec{b}$的终点的有向线段便是$\vec{a} + \vec{b}$。易知矢量加法满足交换律和结合律：

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$\vec{a} - \vec{b}$，表示$\vec{a}$与$\vec{b}$之差，是$\vec{a}$与$(-\vec{b})$之和，即$\vec{a} - \vec{b}$

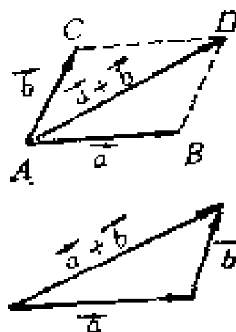


图1—3

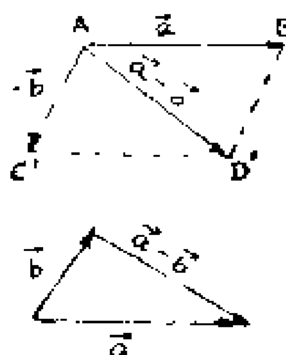


图1—4

$=\vec{a}+(-\vec{b})$，因此，由矢量加法法则，可以得到矢量减法的相应法则：以$\vec{a}$，$-\vec{b}$为邻边，作平行四边形$ABD'C'$，则对角线$\overrightarrow{AD'}=\vec{a}-\vec{b}$（平行四边形法则）；在$\vec{a}$的起点作一矢量等于$\vec{b}$，则由$\vec{b}$的终点到$\vec{a}$的终点的有向线段便是$\vec{a}-\vec{b}$（如图1—4）。

夹角，矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，是将$\vec{a}$，$\vec{b}$平移到同一起点，在$\vec{a}$，$\vec{b}$决定的平面内，一矢量的正向绕起点旋转到与另一矢量的正向重合时所成的角（如图1—5），记作

$$\theta=(\vec{a},\ \vec{b})=(\vec{b},\ \vec{a})，并规定0\leqslant\theta\leqslant\pi。$$

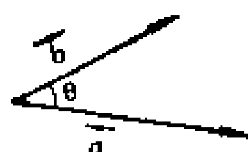


图1—5

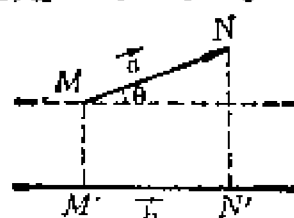


图1—6

投影，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影，是$\vec{a}$的模乘上$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ的余弦，记作$(\vec{a})_{\vec{b}}$或$Prj_{\vec{b}}\vec{a}$，即，$(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|\cos\theta$。所以，$(\vec{a})_{\vec{b}}$是一个带有符号的数值，它的绝对值，等于过$\vec{a}$的起点$M$和终点$N$，分别作垂直于$\vec{b}$的平面，与$\vec{b}$的交点$M'$和$N'$间的线段的长度（如图1—6）。显然，当$\theta=0$时，$(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$且同方向；当$0<\theta<\frac{\pi}{2}$时，$(\vec{a})_{\vec{b}}<0$；当$\theta=\pi$时，$(\vec{a})_{\vec{b}}>0$；当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$(\vec{a})_{\vec{b}}=0$，$\vec{a}\perp\vec{b}$；当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$(\vec{a})_{\vec{b}}=-|\vec{a}|$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$且反方向。

数量λ与矢量$\vec{a}$的乘积$\lambda\vec{a}$，其中$\lambda\neq0$的常数，当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$方向相同，且$|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$方向相反，且$|\lambda\vec{a}|=-\lambda|\vec{a}|$。易知，

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}；$$

若$\vec{a^0}$是非零矢量$\vec{a}$方向上的单位矢量，则有

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0，\quad 即\quad \vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

点积，两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**点积**(或称**内积**)，是 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的模与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角 θ 的余弦的乘积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$，它是一个数量，所以，又称**数量积**。显然，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|(\vec{b})_{\vec{a}}=|\vec{b}|(\vec{a})_{\vec{b}};$$

而 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充要条件为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

易知，下列关系式成立：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}（交换律）$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}（分配律）$$

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2.$$

叉积，两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**叉积**(又称**外积**或**矢量积**)，记作 $\vec{a}\times\vec{b}$，是垂直于 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所决定的平面的一个矢量，它的正向，从 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 组成“右手法则”(如图1—7)，而它的模

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta,$$

$$\theta=(\vec{a},\ \vec{b}).$$

不难看出，$|\vec{a}\times\vec{b}|$ 在数值上等于以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积(如图1—7) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 的充要条件为 $\vec{a}\times\vec{b}=0$；而且下列等

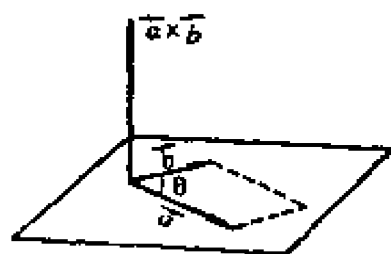


图1—7

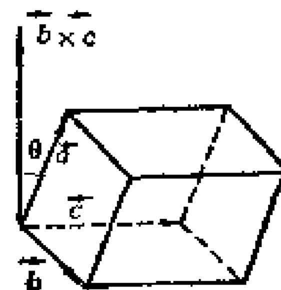


图1—8

式成立：

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},$$
$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}),$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

混合积，三个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积，通常指$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$，是一个数量，即

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta$$

(θ是$\vec{a}$与$\vec{b}\times\vec{c}$的夹角)，不难看出，这个数量的绝对值，等于以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为棱边的平行六面体的体积(如图1—8)。$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面的充要条件

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0;$$

而且，下列等式成立：

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0。$$

三重矢积，是三个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的叉积$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$，是一个矢量。不难推出，下列等式成立：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

1.3 矢量的直角坐标表示及其代数运算

从§1.1、§1.2知道，矢量概念及其运算法则是与坐标系的选择无关的，而作为几何上的有向线段来运算。这样，就可根据解决问题的需要，适当选择坐标系，以使矢量方法更便于应用。直角坐标系，是最常见、最基本的一种坐标系。

(一) 矢量在直角坐标系下的表示。引进空间直角坐标系OXYZ(如图1—9)，将矢量$\vec{A}$的起点置于坐标原点，终点置于另一点M，则$\vec{A}=\overrightarrow{OM}$。这样，决定一个矢量，就相当于决定矢

量终点的位置；反之，空间任一点也可以确定起点在坐标原点，而终点在该点的一个矢量。所以，空间点 M 与矢量 $\overrightarrow{OM}$，是一一对应的。因而，把 M 的坐标 (x,y,z)，称为矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标。

设 α,β,γ 表示矢量 $\vec{A}=\overrightarrow{OM}$ 分别与 X,Y,Z 轴正向的夹角（如图1—9），称为 $\vec{A}$ 的方向角。因为

$$x=(\vec{A})_X=|\vec{A}|\cos\alpha,$$
$$y=(\vec{A})_Y=|\vec{A}|\cos\beta,$$
$$z=(\vec{A})_Z=|\vec{A}|\cos\gamma,$$

所以，矢量 $\vec{A}$ 的坐标 x,y,z 又称为 $\vec{A}$ 在坐标轴方向上的投影。由于，$\vec{A}$ 的方向可由

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{A}|},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{A}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{A}|}$$

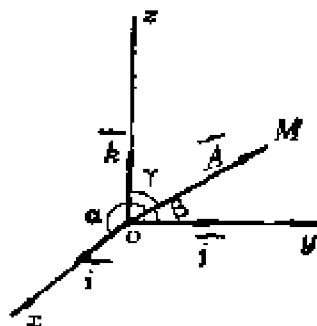


图1—9

来确定；从而，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\vec{A}$ 的方向余弦。规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$。

设 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分别为X，Y，Z轴方向上，起点在坐标原点的单位矢量；（如图1—9），称为基本单位矢量；而 $x\vec{i}$，$y\vec{j}$，$z\vec{k}$ 分别称为 $\vec{A}$ 在X，Y，Z轴上的分矢量。由矢量的加法法则，易知

$$\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

上式就称为矢量 $\vec{A}$ 的坐标表示式（或称投影表示式），常简记为

$$\vec{A}=\{x,y,z\}。$$

由两点距离公式，得

$$|\vec{A}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}。$$

若$\vec{A}$是参数t的函数$\vec{A}=\vec{A}(t)$，则

$$\vec{A}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},$$

$$|\vec{A}(t)|=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)};$$

显然，$\vec{A}(t)$的矢端曲线，是一空间曲线，其方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

(二)矢量的代数运算　　通过矢量的坐标表示式，使得矢量的运算，化为数量(矢量的坐标)与基本单位矢量的运算来实现。

设$\vec{A}=\{x,y,z\}$，$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$；则不难推得下列常用的公式：

(1)　$\vec{A}$的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

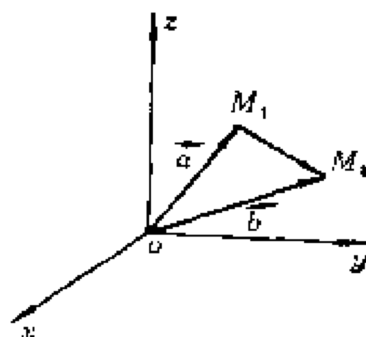


图1—10

(2)　$\lambda\vec{A}=\{\lambda x,\lambda y,\lambda z\}$.

(3)　$\vec{a}\pm\vec{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$；

若$\vec{c}=\overrightarrow{M_1M_2}$(如图1—10)，且$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，因为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\vec{b}-\vec{a}$$

于是$\vec{c}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

从而不管矢量的起点是否在坐标原点，都可用坐标来表示。一般地，$\vec{A}=\{A_x,A_y,A_z\}$，A_x，A_y，A_z表示$\vec{A}$分别在X、Y、Z轴上的投影。在科技中常把起点在坐标原点、终点为另一点M的矢量，称为对M点的**矢径**，而用$\vec{r}$表示。

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$；

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

其中θ为$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角，$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2)$分别为$\vec{a}$，$\vec{b}$的方向角。显然，$\vec{a}\perp\vec{b}$的充要条件为

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

(5) 若$\vec{A}^0$为非零矢量$\vec{A}$方向上的单位矢量，则

$$\vec{A}^0=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}\;;$$

而且　　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，其中$\alpha,\beta,\gamma$为$\vec{A}$的方向角。

(6) $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix};$$

显然，$\vec{a}\parallel\vec{b}$的充要条件：

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2};$$

注意，上式中当分母有一为零时，这条件的形式失去意义，为便于使用，如$x_2=0$时，可理解为x_1亦等于零。

(7)

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

其中$\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$。

1.4 矢量的分析运算

矢量的分析运算，在这里指的是矢量函数$\vec{A}=\vec{A}(t)$的微分，积分运算。因为

$$\vec{A}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},$$

所以，$\vec{A}(t)$的分析运算，可化为普通数量函数(即，$\vec{A}(t)$的坐标函数) $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$的分析运算与基本单位矢量的运算来实现。下面的讨论，均认为$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$满足分析运算的条件，而不再一一赘述。

(1) $\vec{A}(t)$在t处的导数，记作$\frac{d\vec{A}}{dt}$，定义为

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t};$$

而且 $$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

$\frac{d\vec{A}}{dt}$是一个矢量，它的方向是$\vec{A}(t)$的矢端曲线在M处的切线方向(指向t增大一方)(如图1—11)，模

$$\left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}.$$

$\frac{d\vec{A}}{dt}$是t的矢量函数，它的导数，称为$\vec{A}(t)$的二阶导数，

记作$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$，且

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}=x''(t)\vec{i}+y''(t)\vec{j}+z''(t)\vec{k}$$

是t的矢量函数。

若$\vec{A}=\vec{A}(t)$表示的矢端曲线是质点运动轨迹，则质点运动的切线速度

$$\vec{V}=\frac{d\vec{A}}{dt},$$

加速度 $W=\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$。

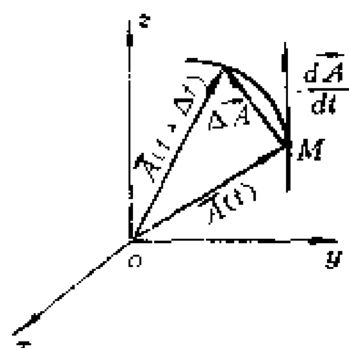


图1—11

$\vec{A}(t)$的**微分**

$$d\vec{A}=\frac{d\vec{A}}{dt}dt=dx(t)\vec{i}+dy(t)\vec{j}+dz(t)\vec{k},$$

是一个**矢量**，它的方向，是$\vec{A}(t)$的矢端曲线在M处的切线方向($dt>0$时与$\frac{d\vec{A}}{dt}$指向相同)，

模

$$|d\vec{A}|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2};$$

值得注意的是，$|d\vec{A}|$是$\vec{A}(t)$表示的矢端曲线的弧微分dl，即$|d\vec{A}|=dl$，于是，令$d\vec{A}=d\vec{l}$，则称$d\vec{l}$为**弧微分矢量**。

(2) $\vec{A}(t)$ 的不定积分

$$\int \vec{A}(t)dt = \vec{i}\int x(t)dt + \vec{j}\int y(t)dt + \vec{k}\int z(t)dt,$$

是一族t的矢量函数。

(3) $A(t)$在$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b \vec{A}(t)dt$，按数量函数中的“分割、求和、取极限”的方法，定义为

$$\int_a^b \vec{A}(t)dt = \lim_{\|\Delta t\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(\xi_i)\Delta t_i$$

其中$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$，$i=1,2,\cdots n$，$t_0=a$，$t_n=b$，　$\xi_i \in [t_{i-1},t_i]$，$\|\Delta t\| = \max|\Delta t_i|$，而且$\int_a^b \vec{A}(t)dt = \vec{i}\int_a^b x(t)dt + \vec{j}\int_a^b y(t)dt + \vec{k}\int_a^b z(t)dt$，是一个常矢量。

例如，设$\vec{A}(t) = e^{2t}\vec{i} + 3t^2\vec{j} - 5t\vec{k}$，则

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = 2e^{2t}\vec{i} + 6t\vec{j} - 5\vec{k};$$

$$\int \vec{A}(t)dt = \vec{i}\int e^{2t}dt + \vec{j}\int 3t^2dt - \vec{k}\int 5tdt,$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\vec{i} + t^3\vec{j} - \frac{5}{2}t^2\vec{k} + \vec{c},$$

其中$\vec{c}$为任意常矢量；

$$\int_0^1 \vec{A}(t)dt = \vec{i}\int_0^1 e^{2t}dt + \vec{j}\int_0^1 3t^2dt - \vec{k}\int_0^1 5tdt$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-1)\vec{i} + \vec{j} - \frac{5}{2}\vec{k}.$$

§2 微分算子

在科学技术中，常使用“算符”来简化变量间的关系式的表示，微分算子就是其中最常见的一种。规定：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

∇称为一阶微分算子(也称哈密顿算子)，读作“del”或“nabla”；∇^2称为二阶微分算子(也称为拉普拉斯算子)，有时也记作 $\Delta = \nabla^2$，读作“del平方”。微分算子∇，不是一个矢量，∇^2也不是一个数量，它们仅仅是运算符号，因此，称为算符。∇或∇^2只有作用于某一量时，才能作为矢量或数量来运算。

设$f = f(x,y,z)$ 是一个数量函数，$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ 是空间点$M(x,y,z)$ 的矢量函数，且$\vec{F}$在X，Y，Z轴上的投影，分别为$F_x = F_x(x,y,z)$，$F_y = F_y(x,y,z)$，$F_z = F_z(x,y,z)$，则$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$，或记作$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$，假定$f$，$F_x, F_y$，$F_z$具有一阶或二阶连续偏导数；于是，有下列常用的算符表示式：

(1) ∇f是一个矢量，表示∇作用于f，而把∇看作矢量与f的乘积，即

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

显然，当f＝常数时，$\nabla f = 0$。

（2）$\nabla\cdot\vec{F}$是一个数量，表示∇作用于$\vec{F}$，把∇看作矢量与矢量$\vec{F}$的点积，按两矢量的点积进行运算，即

$$\nabla\cdot\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\cdot\left(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}F_x+\frac{\partial}{\partial y}F_y+\frac{\partial}{\partial z}F_z$$

$$=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

显然，当$\vec{F}$为常矢量时，$\nabla\cdot\vec{F}=0$。

（3）$\nabla\times\vec{F}$是一个矢量，表示∇作用于$\vec{F}$，把∇看作矢量与矢量$\vec{F}$的叉积，按两矢量的叉积进行运算，即

$$\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\times\left(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k},$$

常记作

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}.$$

显然，当$\vec{F}$是一个常矢量，或$\vec{F}=\{x,y,z\}$时，则$\nabla\times\vec{F}=0$。

（4）$\nabla^2 f$是一个数量，表示∇^2作用于f，把∇^2看作数量与f的乘积，即

$$\nabla^2 f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$$

$\nabla^2 f$有时也记作Δf。显然，当$f=$常数时，$\nabla^2 f=0$。

（5）$\nabla^2\vec{F}$是一个矢量，表示∇^2作用于$\vec{F}$，把∇^2看作数量与矢量$\vec{F}$的乘积，即

$$\nabla^2\vec{F}=\nabla^2(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})$$

$$=\nabla^2 F_x\vec{i}+\nabla^2 F_y\vec{j}+\nabla^2 F_z\vec{k}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right)\vec{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right)\vec{j}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right)\vec{k};$$

$\nabla^2\vec{F}$有时也记作$\Delta\vec{F}$。

应该特别注意的是，∇或∇^2作用于某一量时，其位置不能随便互换。例如，

$$\nabla\cdot\vec{F}\neq\vec{F}\cdot\nabla,$$

因为
$$\vec{F}\cdot\nabla=(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} + F_z \frac{\partial}{\partial z}$$

仍然是一个算符。

§3 微积分的若干概念

本节叙述微积分中的一些概念、术语与公式。

3.1 曲线、曲面与区域

光滑曲线 是指具有连续变化切线的空间曲线。若一曲线，由有限个光滑曲线弧段连成的，称该曲线为逐段光滑曲线。

光滑曲面 是指具有连续变化切平面的空间曲面。若一曲面，由有限个光滑曲面片连成的，称该曲面为逐片光滑曲面。

双侧曲面 是指一空间曲面，在该曲面上，给定任一点的法线正向，当此点沿曲面内的任一封闭曲线移动时，回到原来的位置，法线仍保持原来的正方向。因此，双侧曲面上，某一点的法线方向确定了，就可以确定其它任一点的法线方向；从而，就确定曲面的一侧。所以，双侧曲面，又称为有向曲面，其方向(即，曲面的侧)，由法线方向来确定。

对于闭曲面(例如球面)，规定：外法线为法线正向，外侧为正侧，内侧为负侧（如图1—12）。对于非闭(即，开)曲面，若曲面片的方程为$z=z(x,y)$，规定：上侧(即，$\cos\gamma>0$) 为正侧，下侧(即，$\cos\gamma<0$)为负侧（如图1—13）；若曲面片的方程为$y=y(x,z)$，规定：右侧(即$\cos\beta>0$)为正侧，左侧(即，$\cos\beta<0$)为负侧；若曲面片的方程为$x=x(y,z)$，规定：前侧(即，$\cos\alpha>0$)为正侧，后侧(即，$\cos\alpha<0$)为负侧；其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为所考虑的曲面的法线的方向余弦，而设$z(x,y),y(x,z),x(y,z)$

为单值函数，否则，将它们分出单值支，按上述方法定侧。

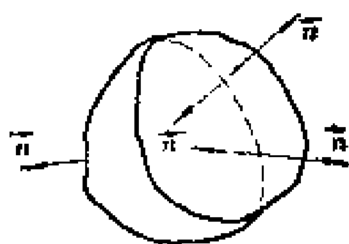


图1—12

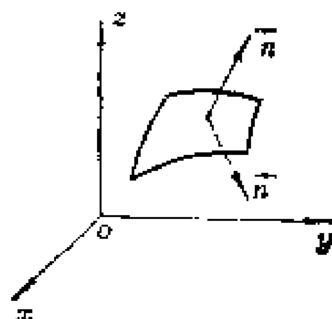


图1—13

有向曲线 是指对于任一光滑或逐段光滑曲线，都有二个方向，选定一个方向为正向，则另一方向就为负向，同时，规定曲线的切线正向与曲线所取的正向一致。例如，非封闭（简称开）曲线（如图1—14），若取从A到B为正向，记作$\overset{\frown}{AB}$，则从B到A为负向，记作$\overset{\frown}{BA}$；对于封闭（简称闭）曲线的方向，与观察点有关，习惯上，设P为观察点，则反时针方向为正向（如图1—15）$\overset{\frown}{M_1M_2M_3M_1}$，顺时针方向为负向（如图1—15）$\overset{\frown}{M_1M_3M_2M_1}$。

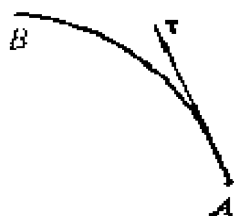


图1—14

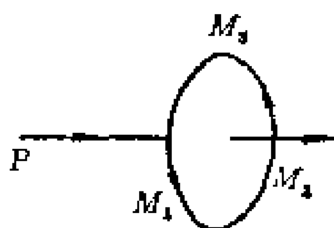


图1—15

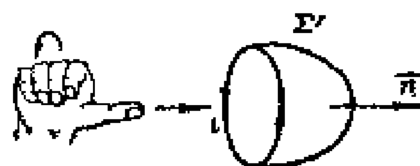


图1—16

曲线与曲面正向联系 是指由闭曲线l，及其所绷的曲面Σ'之间的正向关系；规定：当一个人站在l上，从脚到头的方向，为曲面Σ'的法线正向，且Σ'在人的左手边，而人沿l的前进方向，为l的正向。这种规定，称为“右手定则”（如图1—16）。

以后，我们常说，任意给定曲线、曲面，指的就是具有上述光滑性，有向性的曲线、曲面。

单连通区域 对于平面区域，若在该区域内的任一封闭曲线都可以不经过区域以外的点而连续地收缩成一点，则称此区域是单连通的。对于空间区域，若区域内任一闭曲面，都可以不经过区域外的点，而连续收缩为一点，则该区域称为(二维)单连通区域。以后叙述中涉及到的区域，是指以一个或几个曲面为边界的单连通区域。

3.2 积分元素法 是指简化积分概念中的“分割、求和、取极限”过程的方法。即在等式

$$Q=\lim_{\|d\Omega\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(M_i)\Delta\Omega_i=\int_{\Omega}\varphi(M)d\Omega$$

中，用取区域Ω中的区域元素$d\Omega$及其内一点M，来代替分割区域、任取点的手续，记

$$dQ=\varphi(M)d\Omega$$

称积分元素，省略“求和、取极限”手续，直接写出积分

$$Q=\int_{\Omega}\varphi(M)d\Omega\text{。}$$

当Ω是任一空间曲线l时，$d\Omega=dl$，dl称曲线元素，则

$$Q=\int_{l}\varphi(M)dl$$

称为对弧长的曲线积分，积分值与l的方向无关。若考虑的不是dl本身，而是dl在直角坐标轴上的投影，例如，在X轴上的投影$(dl)_X=dx$，则

$$Q=\int_{l}\varphi(M)dx$$

称为对坐标的曲线积分，积分值与l的方向有关，且l的两个方向之间差一个符号。

引进曲线元素矢量$\overrightarrow{dl}$，模$|\overrightarrow{dl}|=dl$，方向为l的切线方向。

于是

$$dx=(\vec{dl})_X=\cos\alpha dl\ ,$$

其中α是$\vec{dl}$与X轴正向夹角，由于$\cos\alpha$是带符号的，故dx的符号由曲线的方向(即$\cos\alpha$的符号)来确定．当选定l的正方向时，则

$$\int_l\varphi(M)dx=\int_l\varphi(M)\cos\alpha dl.$$

对于其它坐标轴上的情况类似考虑，且有

$$dy=(\vec{dl})_Y=\cos\beta dl\ ,$$

$$dz=(\vec{dl})_Z=\cos\gamma dl\ ,$$

其中β，γ表示$\vec{dl}$分别与Y，Z轴正向的夹角，从而有

$$\vec{dl}=\{dx,\ dy,\ dz\}$$

$$=\{\cos\alpha dl,\ \cos\beta dl,\ \cos\gamma dl\}。$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$．$\cos\gamma$为l的切线的方向余弦。因此，考虑对坐标的曲线积分时，总是指定曲线的方向。

若给定 l 的方程为

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t),$$

$$a\leqslant t\leqslant b$$

则曲线积分化为普通定积分

$$\int_l\varphi(M)dl=\int_a^b\varphi\left[x(t),y(t),z(t)\right]$$

$$\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt\ ,$$

$$\int_l\varphi(M)dx=\int_a^b\varphi\left[x(t),y(t),z(t)\right]x'(t)dt,$$

其中l的方向对应于t从a变到b的方向。

当Ω是任一空间曲面Σ时，$d\Omega=dS$称为曲面元素，则

$$Q=\iint\limits_{\Sigma}\varphi(M)dS$$

称为对面积的曲面积分，积分值与曲面的侧无关。但如果考虑的不是dS本身，而是dS在直角坐标平面的投影面积，例如，考虑dS在XOY平面的投影面积$(dS)_{XOY}=dxdy$，则

$$Q=\iint_{\Sigma}\varphi(M)dxdy$$

称为对坐标的曲面积分，显然，积分值与Σ的侧有关，两侧间差一个符号。

引进曲面元素矢量$\overrightarrow{dS}$，模$|\overrightarrow{dS}|=dS$，方向为Σ所定侧的法线方向；于是

$$dxdy=(\overrightarrow{dS})_{XOY}=\cos\gamma dS,$$

其中γ是$\overrightarrow{dS}$与Z轴正向的夹角，故$dxdy$的符号由曲面Σ的侧($\cos\gamma$的符号)来确定。若选取Σ的正侧，则

$$\iint_{\Sigma}\varphi(M)dxdy=\iint_{\Sigma}\varphi(M)\cos\gamma dS .$$

对于其它坐标平面上的情况类似地有

$$dxdz=(\overrightarrow{dS})_{XOZ}=\cos\beta dS,$$

$$dydz=(\overrightarrow{dS})_{YOZ}=\cos\alpha dS。$$

所以有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dS}&=\{dydz,dxdz,dxdy\}\\&=\{\cos\alpha dS,\cos\beta dS,\cos\gamma dS\},\end{aligned}$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为Σ的法线方向余弦。在考虑对坐标的曲面积分时，总是指定曲面的一侧。

如果给定曲面Σ的方程为$z=z(x,y)$，而Σ在XOY平面的投影区域为D，则曲面积分可化为二重积分

$$\iint_{\Sigma}\varphi(M)dS=\iint_{D}\varphi\left[x,y,z(x,y)\right]$$

$$\cdot \sqrt{1+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}dxdy \text{ .}$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\varphi(M)dxdy = \pm\iint\limits_{D}\varphi\Big[x,y,z(x,y)\Big]dxdy$$

规定Σ的侧后，符号也就确定了，Σ上侧取正号。

当Ω是由闭曲面所围的空间区域时，$d\Omega=dV$，dV称为体积元素，则

$$Q=\iiint\limits_{\Omega}\varphi(M)dV$$

称为三重积分。

3.3 微积分中值公式

微分中值公式1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续、(a,b)内可微，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

或

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,$$

$$0<\theta<1。$$

微分中值公式2 设$f(x,y,z)$在区域R：$|x-x_0|<r_1$，$|y-y_0|<r_2$，$|z-z_0|<r_3$上具有偏导数，则对于任何$|\Delta x|<r_1$，$|\Delta y|<r_2$，$|\Delta z|<r_3$，都有

$$\begin{aligned}
&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)\\
&=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta x\\
&\quad+f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y\\
&\quad+f'_z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\theta_3\Delta z)\Delta z
\end{aligned}$$

$$0<\theta_i<1\quad(i=1,2,3)。$$

特别，若$f(x,y,z)$在R上处处有$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$，则$f(x,y,z)$为一常数。

积分中值公式1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\text{。}$$

积分中值公式2 设$f(x, y)$在有界闭区域D上连续，则在D上至少存在一点(ξ, η)使得

$$\iint_D f(x, y)dxdy=f(\xi, \eta)\sigma,$$

σ表示区域D的面积。

积分中值公式3 设$f(x, y, z)$在有界闭区域Ω上连续，则在Ω上至少存在一点(ξ, η, ζ)使得

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dV=f(\xi, \eta, \zeta)V$$

V为区域Ω的体积。

§4 立体角

在科技中常用到立体角的概念和立体角的计算。本节，我们引进立体角的概念，并讨论它的计算方法。

立体角的概念

设Σ为任一空间曲面，l为Σ的边界曲线；又以l为准线，空间一点P为顶点，作一锥面S，则由S和Σ所围的空间区域Ω，称为曲面Σ（或曲线l）对于P点所张的立体角（如图1—17）。若以P点为心，作一单位球面W，则，S从W截下的一块球面的面积ω，称为所述立体角Ω的大小。选定曲面Σ的一侧，若其

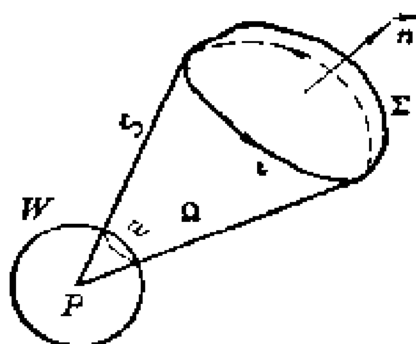


图1—17

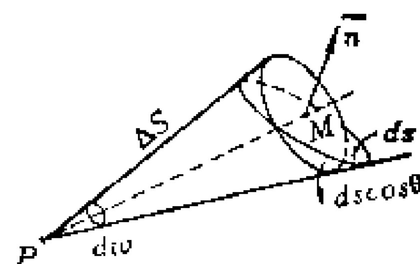


图1—18

法线方向是向着与P点相反的一侧，则规定 $\omega>0$；若其法线方向是向着P的一侧，则规定$\omega<0$。

立体角ω的计算 取 Σ 的曲面元素 dS 及其内一点 M，令 $\overrightarrow{PM}=\vec{r}$，$|\vec{r}|=r$，以$P$点为心，$r$为半径，作一球面$\widetilde{W}$；又以$dS$为底，$P$为顶点，作一锥面 ΔS（如图1—18）；则，ΔS 从ω截下小块面积 $d\omega$，而ΔS从$\widetilde{W}$截下的小块面积为

$$d\widetilde{\omega}=dS\cos\theta,$$

其中θ为单位法矢量$\vec{n}$与$\vec{r}$的夹角。但$\dfrac{d\widetilde{\omega}}{d\omega}=\dfrac{r^2}{1}$，故

$d\omega=\dfrac{dS\cos\theta}{r^2}$；所以，立体角 ω，是一个曲面积分：

$$\omega=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\cos\theta}{r^2}dS$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{dS}. \tag{2.6}$$

因此，计算立体角ω，就是计算曲面积分（2.6）。

特别，Σ为一闭曲面的情况下；当P点在Σ内部时，Σ对P点所张立体角（如图1—19），就是单位球面W的表面积，即

$$\omega=\begin{cases}4\pi, & \Sigma\text{外侧；}\\ -4\pi, & \Sigma\text{内侧。}\end{cases}$$

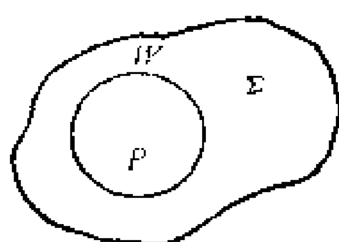


图1—19

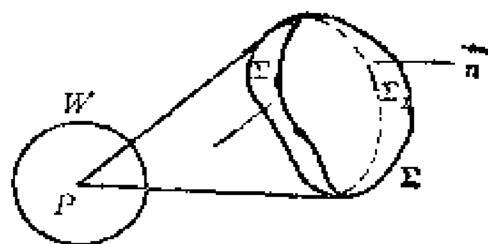


图1—20

当P点在Σ外部时（如图1—20），将Σ分为Σ_1，Σ_2；因为，它们对P点所张的立体角ω_1，ω_2大小相等，符号相反；故不管Σ是内侧，还是外侧，对于P点所张立体角：

$$\omega=\omega_1+\omega_2=0$$

当P点在Σ上时，因为Σ在P点的切平面将单位球面W分为两半（如图1—21），每一半球的表面积为2π，故Σ对P点的立体角$\omega=2\pi$。

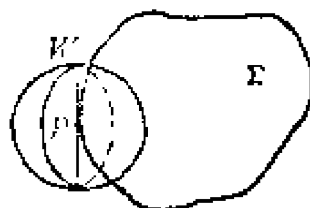


图1—21

§5 迭加原理

物理现象的迭加原理是指：几种不同原因同时出现时所产生的效果，等于各个原因单独出现时所产生的效果的迭加。许多自然现象都具有这种迭加性，例如，多个点电荷所产生的总电位，等于各个点电荷单独产生的电位的总和（迭加）。数学问题的线性性质正是相应物理现象服从迭加原理的反映。所以，在解决数学中的线性问题时，可应用这一迭加原理。

第二章　场

本章，讨论场的概念，研究场的表征量的积分性质及场积分之间的关系。

§1　场的概念

场的数学概念，是从量方面去描述自然现象某些共同特性的。例如，不均匀物体的密度，地面距海平面的高度，大气的温度，太阳系中各位置所受到的引力，流动液体的速度等现象，从量方面去看，就是它们所占的空间部分，每一点都对应一个量，通常是数量或者是矢量。

定义　若在空间中（或空间的某一部分），每一点都对应一个确定的量，则称该空间为场；当空间中每一点对应的量是一个数量，则该空间称为数量场；当空间中每一点对应的量是矢量时，则该空间称为矢量场。

从场的定义，场是用空间的点函数来表征的，通常说，给出一个场，就是指给出该空间的点函数；反之，若给出空间中某一点函数，就是给出一个场。所以，在数学上总是用空间的点函数表示场，因而，称空间的点函数为场的表征量。

数量场，是用空间点的数量函数 $f(M)$ 来表示的，在直角坐标系下，用 $f=f(x, y, z)$表示，其中x，y，z，是点M的坐标。

矢量场，是用空间点的矢量函数$\vec{F}(M)$来表示的，在直角

坐标系下，用$\vec{F}=\vec{F}(x, y, z)$表示，即

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k},$$

记作$\vec{F}=\{F_x, F_y, F_z\}$；其中，$x, y, z$，是点$M$的坐标，$F_x=F_x(x, y, z)$，$F_y=F_y(x, y, z)$，$F_z=F_z(x, y, z)$是矢量$\vec{F}$分别在X,Y,Z轴上的投影或称为坐标，是点的数量函数。由此可见，一个矢量场$\vec{F}$，是由三个数量场F_x，F_y，F_z来决定的。

应该指出，物理场是用它的物理属性或反映物理性质的物理量来表征的，例如，不均匀物体的密度，它所占的空间部分，每一点都有一个密度，而形成密度场(数量场)；大气中风的速度、温度，它们所占的空间部分，每一点有一个风的速度，一个温度，而形成风速场(矢量场)，同时形成温度场(数量场)。在实际中，有些物理场既是数量场，又是矢量场，这是由场的物理性质决定的。

场有两个重要的辅助概念，帮助人们形象地了解场及其性质。

(1) 等量面，是对于数量场$f(M)$来说的，即，凡满足方程

$$f(M)=c \tag{2.1}$$

的点的全体组成的曲面，称为数量场$f(M)$的**等量面**；其中c为给定的常数，(2.1) 称为等量面方程，在直角坐标系下$f(x,y,z)=c$。显然，数量场在它的等量面上，每一点对应的函数值都相等。因为数量场中每一点都对应一个f值，所以过场中每一点只能有一个等量面。若取$c=c_1$，c_2，…时，就得到一族等量面；因此，我们可以用一族等量面，来描绘数量场的几何特征。

(2) 矢线，是对于矢量场$\vec{F}(M)$来说的，若在空间曲线上，每一点M的切线正向，与$\vec{F}$在M点的方向一致，则称该曲线为矢量场$\vec{F}(M)$的矢线（或称$\vec{F}$线）（如图2—1）。

为了求得在直角坐标系下的矢线方程，设 $M(x,y,z)$ 为 $\vec{F}$ 线上任一点，则该点的矢径

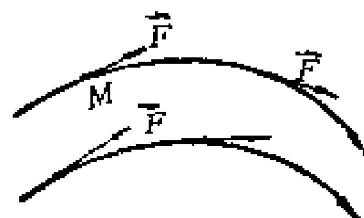


图2—1

$$\vec{r}=\{x,\ y,\ z\},$$

$$d\vec{r}=\{dx,\ dy,\ dz\}。$$

由于 $d\vec{r}$ 是在点 M 处与 $\vec{F}$ 线相切的矢量，因此，$d\vec{r}$ 是与 $\vec{F}=\{F_x,\ F_y,\ F_z\}$ 共线的矢量，于是有

$$\frac{dx}{F_x}=\frac{dy}{F_y}=\frac{dz}{F_z} \tag{2.2}$$

这是一个对称型线性方程，称为 $\vec{F}$ 线的**微分方程**。在(2.2)中若有一分母为零时，可理解为相应分子亦为零。从(2.2)中可适当选取两个方程，分别求得它们的通解为

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z,c_1)=0,\\ \varphi_2(x,y,z,c_2)=0,\end{cases} \tag{2.3}$$

则(2.3)就是所求的 $\vec{F}$ 线方程，其中 c_1，c_2 为任意常数。(2.3)是一族空间曲线，当给定场中一点 M 的初始条件时，则可确定一条 $\vec{F}$ 线。所以，过矢量场中每一点只有一条矢线，且过不同点的两矢线没有公共点。因此，矢线布满着整个矢量场。从而矢量场 $\vec{F}$ 就可以用一族 $\vec{F}$ 线形象地加以描绘。

例1 设 $f(x,\ y,\ z)=x+y+z-1$，则在空间中，每一点都对应于 $f(x,\ y,\ z)$ 一个确定的数值。例如，$f(0,\ 1,\ 1)=1$，$f(2,\ 3,\ 5)=9$，$f(0,\ 0,\ 0)=-1$，$f\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ 等；故以 $f(x,\ y,\ z)$ 表征的空间是一个数量场。它的等量面：

$$f(x,\ y,\ z)=c,$$

即 $$x+y+z-1=c$$

$$x+y+z-(1+c)=0,$$

是平面方程，由于 c 可以取不同的常数值，故 f 的等量面是一族互相平行的平面（如图2—2）。从图形可以看到，数量场的等量面，使人们对数量场有一个形象的感觉。

例2 设 $\vec{F}=\left\{\frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{-3x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ 0\right\}$，则在空间中除（0，0，0）外，每一点都对应一个矢量 $\vec{F}$，例如，$\vec{F}(1,2,1)=\left\{\frac{6}{\sqrt{6}},\ \frac{-3}{\sqrt{6}},\ 0\right\}$，$\vec{F}(1,0,4)=\left\{0,\ \frac{-3}{\sqrt{17}},\ 0\right\}$等，故以 $\vec{F}$ 表征的空间部分(除原点外)为一矢量场。$\vec{F}$ 线微分方程为

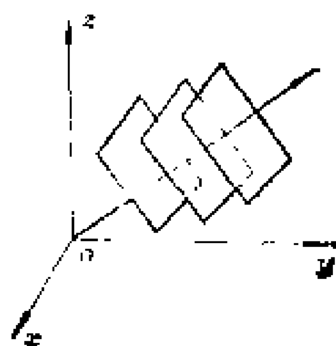


图2—2

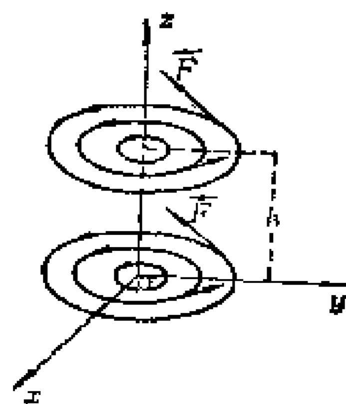


图2—3

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{0},$$

从 $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$ 解得

$$x^2+y^2=c_1,$$

从 $dz=0$，得 $z=c_2$，于是，$\vec{F}$ 线方程

$$\begin{cases}x^2+y^2=c_1,\\ z=c_2\end{cases}$$

是一族中心在Z轴且平行于 XOY 坐标平面上的圆(如图2—3)。

图中为$z=0$及$z=h$平面上的$\vec{F}$线。从而，$\vec{F}$线使人们对矢量场$\vec{F}$有一个形象的感觉。

例3 电荷周围存在一种特殊物质，这种物质所占的空间部分，称为电场。在电场中，每一点都有一个电场强度，记作$\vec{E}$，是一个矢量；同时，每一点也有一个电位，记作V，是一个数量。$\vec{E}$和V是电场的最重要的表征量，当电场用$\vec{E}$表征时，是一个矢量场，称电场强度场；当电场用V表征时，是一个数量场，称电位场。所以，电场既是一个矢量场，又是一个数量场。

电场强度场$\vec{E}$的矢线，简称为$\vec{E}$线。对于静电场，$\vec{E}$线起于正电荷(即从正电荷发射)，终止于负电荷(即负电荷接收)，而且，每一条$\vec{E}$线不自交、不封闭、不中断，任两条$\vec{E}$线不相交。在电场中，还引进电位移矢量$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，简称电位移；其中$\varepsilon$为电容率。$\vec{D}$的矢线，称电位移线（简称$\vec{D}$线）；$\vec{D}$线起于自由正电荷，终止于自由负电荷，其余性质与$\vec{E}$线相同。

电位场V的等量面，称为等电位面，其方程：$V(M)=c$，在直角坐标系下为$V(x, y, z)=c$。显然，等电位面上每一点的电位都相同。

现在研究，点电荷产生的静电场：

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3},$$

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon r},$$

其中$\vec{r}=\{x, y, z\}$，$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

因为

$$E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon r^3}, \quad E_y = \frac{qy}{4\pi\varepsilon r^3}, \quad E_z = \frac{qz}{4\pi\varepsilon r^3};$$

则，$\vec{E}$线的微分方程为

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z},$$

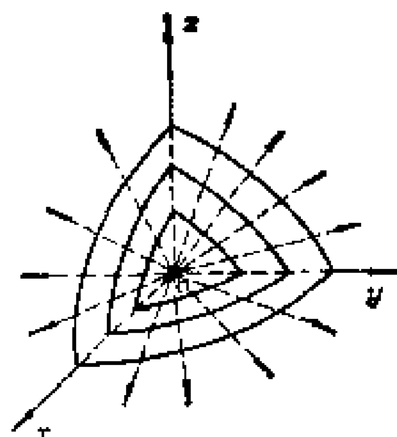


图2—4

即
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

从 $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$，解得，$x - c_1 y = 0$；

从 $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$，解得，$y - c_2 z = 0$；故，

$$\begin{cases} x - c_1 y = 0, \\ y - c_2 z = 0, \end{cases}$$

为所求的$\vec{E}$线方程，是一族从原点出发的射线（如图2—4）的虚线．事实上，就是假定将一正电荷置于坐标原点，该电荷所发射出去的$\vec{E}$线。

电位场V的等电位面方程为

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c,$$

化简得 $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon c}\right)^2$，

$c \neq 0$，是以（0，0，0）为心，$\frac{q}{4\pi\varepsilon c}$ 为半径的一族同心球面（如图2—4）的实线。

例4 任何运动电荷或电流的周围，存在一种特殊的物质，这种物质所占的空间部分，称为磁场．磁场本身是一个矢量场，

它的最重要的表征量，是磁感应强度矢量$\vec{B}$，它描述场中每一点的方向与强弱。磁场也常用磁场强度矢量$\vec{H}$来表征；而且$\vec{B}=\mu\vec{H}$，其中μ为磁导率。

磁感应强度$\vec{B}$的矢线，简称为$\vec{B}$线；磁场强度$\vec{H}$的矢线，简称为$\vec{H}$线。任何磁场中，$\vec{B}$或$\vec{H}$线，每一条都是环绕电流的闭合曲线，没有起点，也没有终点，它的回转方向和它所环绕的电流方向，按"右手定则"联系，而且与闭合电路相链。

现在，研究"无限长"直电流产生的静磁场，若取导线为Z轴，则

$$\vec{H}=\frac{I}{2\pi r^2}(-y\vec{i}+x\vec{j}).$$

其中I为通过导线的电流，r为场中任一点到导线的距离。因为

$$H_x=\frac{-Iy}{2\pi r^2},$$

$$H_y=\frac{Ix}{2\pi r^2},$$

$$H_z=0,$$

则，$\vec{H}$线的微分方程为

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0},$$

解之得，$\vec{H}$线方程：

$$\begin{cases}x^2+y^2=C_1{}^2,\\Z=C_2\end{cases},$$

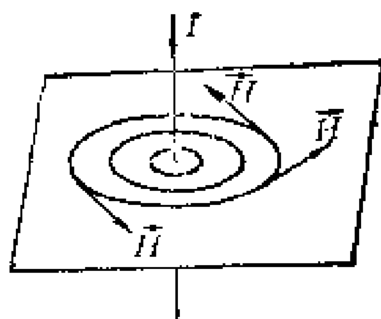


图2—5

是中心在Z轴且平行于XOY平面的一族园（图2—5）为一个平面上的$\vec{H}$线。

§2 场的积分性质

场的积分性质，是反映场在某一区域上的数量性质，描述场在某一区域内的变化特征。

2.1 矢通量 是表述矢量场的矢线，穿过某一曲面的“数目”多少的一个度量值；是用来描述矢量场在某一区域上的一种数量性质。

如设$\vec{F}(M)$为一流速场（假定流体是稳定流动的液体，即液体中各点的速度只与该点的位置有关而与时间无关。其密度为常数，设为1），求流体以速度$\vec{F}=\{F_x, F_y, F_z\}$，在单位时间内流过场中某一曲面$\Sigma$正侧的流量（如图2—6）。

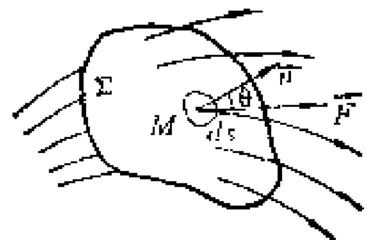


图2—6

为此，在Σ上取曲面元素dS及其内一点M，则流过dS的流量，就近似地等于

$$dQ=|\vec{F}(M)|\cos\theta dS,$$

其中θ是流速矢量$\vec{F}$与Σ在点M的法矢量$\vec{n}$（设为单位矢量）的夹角。从而，在单位时间内流体流过Σ正侧的流量Q，就可用曲面积分来表示，即

$$Q=\iint_{\Sigma}\left|\vec{F}\right|\cos\theta\, dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{m}\ dS=\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS}.$$

这正是反映了流（速）线（即矢线）穿过Σ正侧的“数目”（即流量）。

所以，一般有如下定义。

定义 矢量场$\vec{F}$在场中某一曲面Σ上的面积分

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS} \tag{2.4}$$

称为矢量场$\vec{F}$穿过Σ指定侧的矢通量，或者形象地称为$\vec{F}$线穿过Σ指定侧的“数目”。

在空间直角坐标系下，因为

$$\vec{F}=\{F_x,\ F_y,\ F_z\},$$

$$\overrightarrow{dS}=\{dydz,\ dzdx,\ dxdy\}$$

$$=\{\cos\alpha dS,\ \cos\beta dS,\ \cos\gamma dS\},$$

则(2.4)化为

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}F_xdydz+F_ydzdx+F_zdxdy \tag{2.4—1}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma)dS \tag{2.4—2}$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为Σ的法方向$\vec{n}$的方向余弦，Σ取正侧。若Σ为闭曲面时，矢通量记为

$$\Phi_0=\oiint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS} \tag{2.5}$$

因此，计算$\vec{F}$的矢通量或者计算$\vec{F}$线穿过曲面Σ的“数目”，就是计算$\vec{F}$在Σ上的曲面积分(2.4)。这样，我们在实际中，就是用这个积分数值（按绝对值）的大小，来度量矢线穿过Σ的“数目”的多少、通量的大小。

当$\Phi>0$时，表示矢线朝Σ的正侧穿过去；当$\Phi<0$时，表示矢线朝Σ的负侧穿过来；当$\Phi=0$，表示矢线从Σ穿过去与穿过来的“数目”相等（但并不意味着必有$\vec{F}=0$）。若Σ为一闭曲面，则$\Phi_0>0$表示矢线，从Σ所围的区域Ω内向Σ外侧穿出去，

$\Phi_0<0$ 表示矢线从场周围向Σ的内侧穿进Ω内；这两种情况，把区域Ω称为发射（当$\Phi_0>0$时）或接收（当$\Phi_0<0$时）矢线的有源区域。当$\Phi_0=0$时，表示Ω既不接收也不发射矢线，此时称Ω为无源区域。所以，矢通量Φ_0是描述场中某区域内源的性质的一个数量。

如上所述，所谓计算矢线的数目，就是计算矢通量这种积分值，作为度量矢线的多少及其去向的标度。

例5 求$\vec{F}=\{x,\ y,\ z\}$穿过正六面体Σ：$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$，外侧的矢通量。

解 矢通量

$$\Phi_0=\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{ds}=\oiint_{\Sigma}xdydz+yd\times dz+zd\times dy$$

其中Σ是由六个平面Σ_i $i=1,2,\cdots6$组成的平行六面体（如图2—7）。而且，$\Sigma_1(x=a)$和$\Sigma_2(x=0)$，在XOY$(z=0)$及ZOX$(y=0)$平面上的投影面积为零；$\Sigma_5(z=a)\Sigma_6(z=0)$，在YOZ及ZOX平面上的投影面积为零。这样，

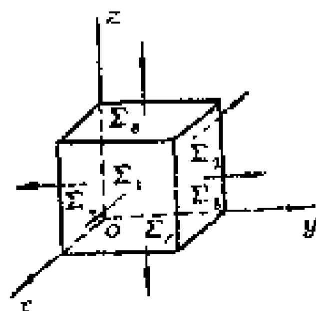


图2—7

$$\oiint_{\Sigma}xdydz=\sum_{i=1}^{6}\iint_{\Sigma i}xdydz=\iint_{\Sigma_1}xdydz$$

$$+\iint_{\Sigma_2}xdydz=\int_0^a\int_0^a adydz-\int_0^a\int_0^a 0dydz=a^3;$$

同理可得

$$\oiint_{\Sigma}ydxdz=a^3;\quad \oiint_{\Sigma}zdxdy=a^3;$$

故 $$\Phi_0=\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=3a^3.$$

显然，当$\vec{F}$穿过Σ内侧时，$\Phi_0=-3a^3$。

从上述结果可知，由平行六面体Σ所围的区域，是有源区域。而且，$\vec{F}$从棱边$a=1$（此时，$\Phi_0=3$），比棱边$a=\frac{1}{2}$（此时，$\Phi_0=\frac{3}{8}$）的六面体内所发射的矢线要多八倍。

如果$\vec{F}=\{a_1, a_2, a_3\}$，$a_i\neq0$，$i=1, 2, 3$，是一常矢量，显然

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} a_1 dydz=\iint_{\Sigma_1} a_1 dydz+\iint_{\Sigma_2} a_1 dydz$$

$$=\int_0^a\int_0^a a_1 dydz-\int_0\int_0 a_1 dydz$$

$$=0,$$

同时 $$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} a_2 dxdz=0\,;\ \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} a_3 dxdy=0.$$

故 $$\Phi_0=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=0.$$

虽然矢通量$\Phi_0=0$，但$\vec{F}$并不是零矢量；而且，不管这个六面体多大或多小（甚至对于任闭曲面），都与Φ_0的值无关，且$\Phi_0=0$；所以，由Σ所围的区域，是无源区域。

2.2 矢通量的物理意义 若$\vec{F}$是有物理属性的矢量场，则矢通量是具有不同物理意义的量，是表述场在某区域内，源的物理特性的工具。

在电磁场中，若$\vec{F}=\vec{E}$，则

$$\Phi_E=\iint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{dS}$$

称为$\vec{E}$通量，即$\vec{E}$线穿过Σ的数目；若$\vec{F}=\vec{D}$，则

$$\Phi_D = \iint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{dS}$$

称为$\vec{D}$通量，即$\vec{D}$线穿过Σ的数目。若$\vec{F} = \vec{H}$，则

$$\Phi_H = \iint_{\Sigma} \vec{H} \cdot \vec{dS}$$

称为$\vec{H}$通量，即$\vec{H}$线穿过Σ的数目；若$\vec{F} = \vec{B}$，则

$$\Phi_B = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

称为$\vec{B}$通量，即$\vec{B}$线穿过Σ的数目。

对于静磁场，设Σ是场中任一闭曲面，由于从Σ内穿出来的$\vec{B}$通量是正的，而穿入Σ内的$\vec{B}$通量是负的，但它们的绝对值相等；又因为每一条$\vec{B}$线都是闭合曲线，所以，穿过任一闭曲面Σ的总的$\vec{B}$通量为零，即

$$\Phi_B = \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0; \tag{2.6}$$

或者，$\vec{H}$通量为零，即

$$\Phi_H = \oiint_{\Sigma} \vec{H} \cdot \vec{dS} = 0.$$

这一结论，表述了静磁场一个重要的特性——**无源性**；即静磁场中，任一闭区域都是无源区域.这个性质称为磁通的连续性；它反映了自然界中,没有单独存在的N(北)极或S(南)极这一客观属性。

对于静电场，一般就没有这一特性了.我们首先考虑,点电荷的情形.设单个点电荷所产生的电场，

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r},$$

且点电荷在任一球面Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$内（如图2—8），于是从球面穿出去的$\vec{E}$通量

$$\Phi_E=\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\oiint_\Sigma\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{dS}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\oiint_\Sigma\frac{1}{r^2}dS=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\oiint_\Sigma\frac{1}{a^2}dS$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}\cdot 4\pi a^2=\frac{q}{\varepsilon}.$$

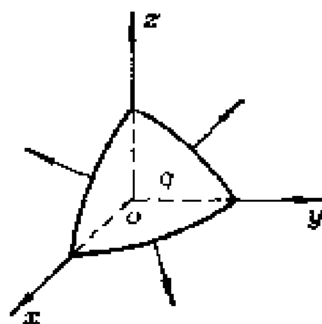


图2—8

事实上，若Σ是任一闭曲面时，因为Σ外侧，对点电荷q，所张的立体角为4π，即

$$\Phi_E=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\oiint_\Sigma\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{dS}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot 4\pi=\frac{q}{\varepsilon};$$

若Σ内有任意多个点电荷，因为Σ外侧，对每一点电荷，上式均成立，由迭加原理，则有

$$\Phi_E=\oiint_\Sigma\vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}q_n=\frac{1}{\varepsilon}q,$$

其中$q=\sum\limits_{i=1}^{n}q_n$，是任意多个点电荷量的总电荷量。

其次，考虑电荷连续分布的情形。即设电荷连续分布在由任一闭曲面，所围的空间区域Ω内。为了求得Φ_E和以后的使用，我们引进电荷体密度的概念：单位体积内的电荷量，称为电荷平均体密度，记作$\tilde{\rho}=\frac{\Delta q}{\Delta V}$；而

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}=\rho,$$

ρ称为M点的**电荷体密度**，其中$\Delta V\to 0$，表示体积ΔV，以任意方

式收缩成一点M。于是，我们取Ω的体积元素dV，及其内一点M，这样，就可以把dV内的电荷量，看作集中于M点，而且近似于ρdV；从而，问题就化为任意多个点电荷的情形，再由三重积分的概念，则

$$\Phi_E = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{\Omega} \rho dV = \frac{1}{\varepsilon} q,$$

其中q是Ω内的总电荷量，而把上式中的三重积分$\iiint_{\Omega}\rho dV$称为$\vec{E}$在Ω内的通量容量。

从上述，对于静电场的讨论，得出一个重要的结论：在静电场中，穿过任一闭曲面Σ的$\vec{E}$通量，等于由Σ所围的区域Ω内的总电荷量q的$\frac{1}{\varepsilon}$倍，即

$$\Phi_E = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon}, \tag{2.7}$$

其中Σ取外侧。(2.7)在电学中，称为高斯定律。这一结果表述了静电场的有源性；即在静电场中，任一个有电荷的区域都是有源区域，源就是该区域的电荷，源的强弱就是该区域内的总电荷量的大小。换句话说，在这样的区域内，由正电荷发射或由负电荷接收$\vec{E}$线的数目，等于该区域内，总电荷量q的$\frac{1}{\varepsilon}$倍。从而，也说明了静电场与静磁场在源方面的基本区别。但是，在静电场中，如果在某一区域内，没有电荷（或电荷在区域外部），则该区域是一个无源区域。例如，一点电荷在某一闭曲面所围的区域的外部，则该曲面对于该点电荷，所张的立体角为零，从而，

$$\Phi_E = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0.$$

即该区域是无源区域。

因此，通过矢通量的计算，使我们从量上，判断和获得物理矢量场，在某一区域内，源的物理属性。

2.3　旋转量　是表述矢量场在某一闭曲线（指定方向）运转一周时的一个度量值，是用来描述矢量场在某一闭曲线上的一种数量性质。

如设$\vec{F}(M)$为一力场，l为场中某一闭曲线（如图2—9），求质点M在力$\vec{F}$的作用下，沿l正向运转一周时所作的功。

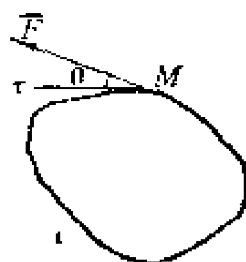


图2—9

为此，取l的曲线元素dl及其上一点M，则当质点运动经过dl时，$\vec{F}$所作的功就近似地等于

$$dW=|\vec{F}(M)|\cos\theta dl,$$

其中θ是$\vec{F}$与l在M点切矢量$\vec{\tau}$（设为单位矢量）的正向间夹角。从而质点沿l运转一周时，$\vec{F}$所作的功可用曲线积分来表示，即

$$W=\oint_l dw=\oint_l|\vec{F}(M)|\cos\theta dl$$

$$=\oint_l\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dl=\oint_l\vec{F}\cdot\vec{dl}$$

所以，一般地有如下定义。

定义　矢量场$\vec{F}(M)$沿场中某一闭曲线l的线积分

$$\Psi_0=\oint_l\vec{F}\cdot\vec{dl}\qquad(2.8)$$

称为矢量场$\vec{F}(M)$沿该曲线按指定方向的**旋转量**（或环量）。

在直角坐标系下，因为

$$\vec{F}=\{F_x,\ F_y,\ F_z\},$$

$$\vec{dl}=\{dx,\ dy,\ dz\},$$
$$=\{\cos\alpha dl,\ \cos\beta dl,\ \cos\gamma dl\},$$

则(2.8)可化为

$$\Psi_0=\oint_l F_x dx+F_y dy+F_z dz \qquad (2.8—1)$$

$$=\oint_l (F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma)dl \qquad (2.8—2)$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是曲线l的切矢量$\vec{\tau}$的方向余弦，并取l的弧长增加的方向为l的正向，$\vec{\tau}$与l的方向一致。

因此，计算矢量场$\vec{F}$的旋转量，就是计算$\vec{F}$沿闭路的曲线积分(2.8)。当这个积分值为零时，称$\vec{F}$在l上是有旋的。所以，旋转量是描述矢量场$\vec{F}$，在某一闭曲线上旋的性质的一个数量。

例6 求质量为m的质点，沿任一平面曲线C：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ a\leqslant t\leqslant b$$

从点$A(x(a),y(a))$移动到点$B(x(b),y(b))$时，重力所作的功。

解 由于作用在质点上的重力$\vec{F}=\{0,mg\}$，故所作的功

$$W=\int_c \vec{F}\cdot\vec{dl}=\int_c mgdy$$

$$=\int_a^b mgy'(t)dt=mg[y(b)-y(a)]$$

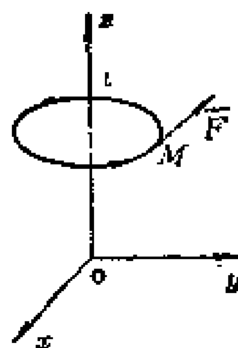


图2—10

这结果表明，质点从A移动到B时重力所作的功，只与A、B位置有关，而与运动路线无关。因此，质点沿任一闭路再回到原来位置时，重力所作的功（即旋转量）为零。

例7 求矢量场$\vec{F}=\{x,\ y,\ z\}$沿圆周l(如图2—10)：$x^2+y^2=r^2$，$z=2$，正向的旋转量。

解 因为，在l上每一点M，对应于$\vec{F}(M)=\{x,\ y,z\}$，且

$$|\vec{F}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$= \sqrt{r^2+4},$$

θ为l在M点的切线$\vec{\tau}$的正向，与$\vec{F}$的夹角且$\theta=\frac{\pi}{2}$；故，旋转量

$$\Psi_0 = \oint_l \vec{F}\cdot\vec{dl} = \oint_l |\vec{F}|\cos\theta dl = 0,$$

即$\vec{F}$在圆周l上是无旋的。

例8 求矢量场$\vec{F}=\{x,y,z\}$，沿折线$L:\overline{OM_1M_2M_3O}$（如图2—11）的旋转量，其中L由$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$z=0$组成。

解 容易计算，$\vec{F}$沿L的旋转量

$$\Psi_0 = \oint_L \vec{F}\cdot\vec{dl}$$
$$= \int_{\overline{OM_1}} \vec{F}\cdot\vec{dl} + \int_{\overline{M_1M_2}} \vec{F}\cdot\vec{dl}$$
$$+ \int_{\overline{M_2M_3}} \vec{F}\cdot\vec{dl} + \int_{\overline{M_3O}} \vec{F}\cdot dl$$
$$=0,$$

即$\vec{F}$在L上是无旋的。

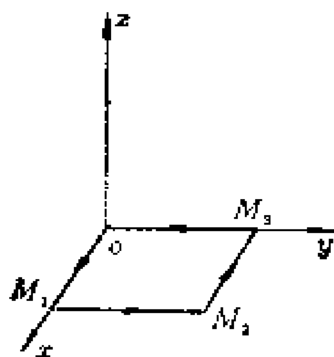


图2—11

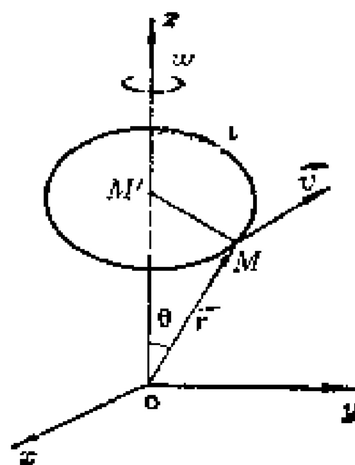


图2—12

例9 设某一质点（如刚体质点）M，以等角速度$\vec{\omega}=\{\omega_x,\omega_y,\omega_z\}$，绕Z轴沿圆周$l$：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=2$作旋转运

动。求质点M的切线速度$\vec{v}$的旋转量。

解 （如图2—12）从$\vec{\omega}$的正向观察质点M，M是反时针方向旋转的；设$\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\{x,y,z\}$，$|\vec{r}|=r$；因为$M$的轨迹是圆周，而圆的半径$a=|M'M|$，即是$M$到轴线的距离；又因为圆弧与圆心角之比等于半径；设$\vec{r}$与$\vec{\omega}$的夹角为$\theta$，则$M$点的快慢为$|\vec{v}|=|\vec{\omega}|a=|\vec{\omega}|r\sin\theta$；而$\vec{v}$的方向与$\vec{\omega}$和$\vec{r}$都垂直，且符合右手法则；于是$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$。故$\Psi_0=\oint_l \vec{v}\cdot\vec{dl}=\oint_l(\omega_y z-\omega_z y)dx+(\omega_z x-\omega_x z)dy+(\omega_x y-\omega_y x)dz=\int_0^{2\pi}(-2\omega_y a\sin t-2\omega_x a\cos t+\omega_z a^2)dt=2\pi a^2\omega_z$。

由此可知，Ψ_0与角速度有关。

2.4 旋转量的物理意义 若$\vec{F}$是有物理属性的矢量场，则旋转量是具有不同物理意义的量，是表述场在某一闭曲线上，旋的物理特性的工具。

在电磁场中，若$\vec{F}$是电场力，则

$$\Psi_0=\oint_l \vec{F}\cdot\vec{dl},$$

表示电场力$\vec{F}$，将任意电荷沿l按指定方向旋转一周，所做的功。如果l不是闭曲线，而是一段曲线弧$\widehat{M_1M_2}$，则$\vec{F}$将电荷从M_1移动到M_2所作的功为线积分：$\int_{\widehat{M_1M_2}}\vec{F}\cdot\vec{dl}$。

因为静电场是静止电荷产生的，它的分布情况，只与电荷量及其位置有关。从而，将一电荷沿任一闭曲线移动一周时，返回到原来位置，电场能量也没有变化，由能量守恒关系，此时，电场力作的功为零，即

$$\Psi_0=\oint_l \vec{F}\cdot\vec{dl}=0。$$

若设被移动的点电荷为q'，则它在电场强度$\vec{E}$处，所受的电场

力 $\vec{F}=q'\vec{E}$，于是，

$$\Psi_0=q'\oint_l \vec{E}\cdot\vec{dl}=0;$$

因而 $$\Psi_E=\oint_l \vec{E}\cdot\vec{dl}=0,$$

即 在静电场中，$\vec{E}$沿任一闭曲线的旋转量为零。这一结论，表述了静电场一个重要的特性——无旋性，就是说，静电场$\vec{E}$，在场中任一闭曲线上是无旋的。

例10 设点电荷q置于坐标原点，产生静电场。求单位正电荷沿曲线l：$x=x(t),y=y(t),z=z(t),a\leqslant t\leqslant b$，从$M_1(x(a),y(a),z(a))$移动到$M_2(x(b),y(b),z(b))$时电场作的功。

解 因为位于点$M(x,y,z)$处单位正电荷该场内所受的力，由库仑定律知$\vec{F}=\frac{q}{r^3}\vec{r}$，其中$\vec{r}=\{x,y,z\}$。

于是有 $$W=q\int_{\widehat{M_1M_2}}\frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{dl}=\int_a^b\frac{xx'+yy'+zz'}{(x^2+y^2+z^2)3/2}dt$$

$$=\frac{q}{2}\int_{r(a)}^{r(b)}\frac{dr^2}{r^3}=q\int_{r(a)}^{r(b)}\frac{dr}{r^2}=q\left[\frac{1}{r(a)}-\frac{1}{r(b)}\right].$$

其中$r=r(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$，$r(a)$，$r(b)$ 分别是M_1、M_2到原点的距离。

这结果表明，静电场作功，只与单位电荷运动的起点、终点有关，而与移动路线无关。所以，电荷沿任一闭路返回原来位置时静电场作的功为零。

对于静磁场，一般就没有这一特性了。我们首先考察产生磁场的电流在某一导线中流过的情形。设"无限长"直电流产生的磁场，

$$\vec{H}=\frac{I}{2\pi r^2}(-y\vec{i}+x\vec{j}),$$

（其中取导线为z轴）沿着任一$\vec{H}$线l（平行于XOY平面的圆周）正向的旋转量

$$\Psi_H=\oint_l \vec{H}\cdot\vec{dl}=\oint_l |\vec{H}|\cos\theta dl$$

$$=\oint_l \frac{I}{2\pi r}dl=\frac{I}{2\pi r}2\pi r=I,$$

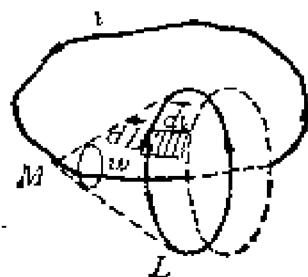


图2—13

其中θ为$\vec{H}$与l的切线$\vec{\tau}$的正向夹角。显然，

$$\Psi_B=\oint_l \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu I.$$

若磁场是由电流流过某一回路L时产生的，现在我们计算，$\vec{B}$沿着场中任一闭曲线l的旋转量，其中L与l相链（如图2—13）。

因为，由比奥-沙伐尔定律知，电流I流过L，所产生的磁场中，任一点M的磁感应强度$\vec{B}$为

$$\vec{B}=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_L \frac{\vec{dL}\times\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{r}$为$\vec{dL}$到观察点M的矢径，$|\vec{r}|=r$。于是，$\vec{B}$沿l的旋转量

$$\Psi_B=\oint_l \vec{B}\cdot\vec{dl}=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_l\left[\oint_L\frac{\vec{dL}\times\vec{r}}{r^3}\right]\cdot\vec{dl}.$$

由矢量性质，$(\vec{dL}\times\vec{r})\cdot\vec{dl}=(\vec{dL}\times\vec{dl})\cdot\vec{r}$；而$\vec{dL}\times\vec{dl}$表示，以$\vec{dL}$，$\vec{dl}$为邻边的平行四边形的有向面积，记作$\vec{ds}=\vec{dL}\times\vec{dl}$。但是，当$M$点移动$\vec{dl}$时，相应地$L$平移$\vec{dl}$，其所扫过的那部分环形面积，记作$dS$。我们近似地取$\vec{dS}$为$dS$的面积元素矢量，由立体角的概念知，$\vec{dS}$对于$M$点所张的立体角：

$$d\omega_s=\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{dS}.$$

因此，dS对于M点，所张立体角$d\omega$为

$$d\omega = \oint_L d\omega_s,$$

从而 $$\Psi_B = \oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l d\omega,$$

又由于当M点沿l移动一周时，L对于M所张的立体角ω易知为$\oint_l d\omega = 4\pi$，故

$$\Psi_B = \oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu I. \qquad (*)$$

当l与L不相链时，显然$\oint_l d\omega = 0$，故

$$\Psi_B = \oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0.$$

如果在空间中，有任意多个电流回路；因为对于每一回路，(*)式都成立；由迭加原理，则有

$$\Psi_B = \oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu \sum_{i=1}^{n} I_i = \mu I,$$

其中$I = \sum_{i=1}^{n} I_i$是任意多个回路的总电流。

其次，我们考虑，产生磁场的电流，不是在一个或几个导线中流过，而是流过由某一闭曲线l所绷的曲面Σ'的情形。为了求得Ψ_B及以后的使用，引进电流密度矢量的概念：流过垂直于电流流动方向的单位面积上电流量，称为电流平均密度，记作$\tilde{\delta} = \frac{\Delta I}{\Delta S}$，而

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \delta$$

(其中$\Delta S \to 0$，表示曲面积ΔS，以任意方式收缩成一点M)，δ称为电流在M点的（面）密度；并规定矢量$\vec{\delta}$，$|\vec{\delta}| = \delta$，方向为电

流流动的方向；称$\vec{\delta}$为电流密度矢量。于是，我们取Σ'的曲面元素dS，及其内一点M（如图2—14），这样，流过dS的电流量，近似为

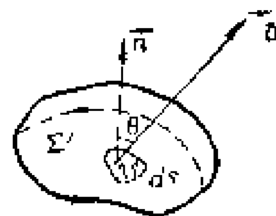


图2—14

$$dI = \delta\cos\theta dS$$
$$= \vec{\delta}\cdot\vec{dS},$$

其中θ为Σ'在M点的单位法矢量$\vec{n}$，与$\vec{\delta}$的夹角。因此，就可以把dI看作流过过M点的与l相链的回路的电流量；从而就化为任意多个回路的情形。由曲面积分的概念，则

$$\Psi_B = \oint_l \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu\iint_{\Sigma'}\vec{\delta}\cdot\vec{dS} = \mu I.$$

其中$I = \iint_{\Sigma'}\vec{\delta}\cdot\vec{dS}$为流过曲面$\Sigma'$的总电流量；同时，也是$\vec{\delta}$穿过$\Sigma'$的矢通量。

从上述，对于静磁场的讨论，得出一个重要的结论：在静磁场中，$\vec{B}$沿着场中，任一闭曲线l的旋转量，等于电流流过与l相链的载流导线回路或流过曲面Σ'的总电流量I的μ倍，即

$$\Psi_B = \oint_l \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu I;$$

亦即有 $$\Psi_H = \oint_l \vec{H}\cdot\vec{dl} = I.$$

上式在物理中，称为全电流定律（或称安培定律）。这一结果表述了静磁场的有旋性；即在静磁场中，任一闭曲线l是有旋的，旋转量就是与l相链的载流回路或流过曲面Σ'的电流量；旋的强弱就是该电流量的大小。从而，也说明了静磁场与静电场在旋方面的基本区别。但是，若l与电流回路不相链或Σ'没有电流流过时，则易知

$$\Psi_B = \oint_l \vec{B}\cdot\vec{dl} = 0.$$

所以，通过旋转量的计算，使我们能从量上去判断和获得物理矢量场在某一闭曲线上旋的物理属性。

§3　场积分之间的关系

场的积分关系是表述矢量场及其所产生的场之间的关系的一种方式；通过这种关系的研究，可以建立判断矢量场有关源和旋方面的性质的准则及计算方法。

我们在§2中所阐述的两种场积分的物理意义，为本节的研究提供了物理模型。

3.1　矢通量与三重积分关系

定理2.1　设矢量场 $\vec{F}=\{F_x, F_y, F_z\}$，$F_x$、$F_y$，$F_z$在任一光滑闭曲面$\Sigma$上及其所围的区域$\Omega$内，有一阶连续偏导数；则

$$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}dV. \tag{2.9}$$

这个公式，称为奥高公式（有时，也简称为高斯公式）。其中Σ取外侧，$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$。

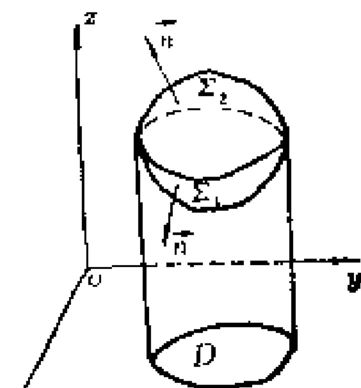


图2—15

证明　设Σ与坐标轴平行的直线，至多交于两点，并将Σ分为二部分：Σ_1，Σ_2（如图2—15）。它们的方程分别为

$$z=z_1(x,y),$$

$$z=z_2(x,y).$$

因为，Ω在XOY平面的投影区域为D，所以

$$\oiint_{\Sigma}F_z dxdy=\iint_{\Sigma_1}F_z dxdy+\iint_{\Sigma_2}F_z dxdy$$

$$=\iint_{D}[F_z(x,y,z_2)-F_z(x,y,z_1)]dxdy$$

又 $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial F_z}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial F_z}{\partial z}dz$$

$$=\iint\limits_{D}[F_z(x,y,z_2)-F_z(x,y,z_1)]dxdy$$

故 $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial F_z}{\partial z}dxdydz=\oiint\limits_{\Sigma}F_z dxdy \tag{2.9—1}$$

同理可得

$$\oiint\limits_{\Sigma}F_y dxdz=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial F_y}{\partial y}dxdydz, \tag{2.9—2}$$

$$\oiint\limits_{\Sigma}F_x dydz=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial F_x}{\partial x}dxdydz, \tag{2.9—3}$$

(2.9—1)+(2.9—2)+(2.9—3)，即可得（2.9）。

定理2.1说明，对于矢量场$\vec{F}$，存在一个数量场$\nabla\cdot\vec{F}$；而且，$\vec{F}$穿过Σ外侧的矢通量，就等于$\nabla\cdot\vec{F}$在Ω内的三重积分。这样，矢通量的计算，就可以简化为三重积分的计算。所以，把（2.9）中的三重积分，称为$\vec{F}$在Ω内的**通量容量**或称**源容量**，就十分自然了。对于静电场$\vec{E}$，它所产生的数量场，就是密度场ρ；而通量容量，就是$\vec{E}$在Ω内的电荷量（参见§2.3）

应该指出，证明奥高公式时，假定Σ与坐标轴平行的直线至多交于两点，如多于两点，则可将区域Ω分成若干个部分区域，使每部分区域的边界曲面和坐标轴平行的直线的交点至多两个，分别在这些部分区域内应用(2.9)，就可证得在整个区域Ω上，奥高公式仍然成立。

如果Ω不是(二维)单连通区域(如区域有“洞”的情形)，在应用上也要考虑这种有“洞”的区域，用一闭曲面$\widetilde{\Sigma}$包围这个“洞”，则Ω是由两闭曲面Σ与$\widetilde{\Sigma}$所介的区域，此时(2·9)化为

$$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{ds}-\oiint_{\tilde{\Sigma}}\vec{F}\cdot\vec{ds}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}dV. \qquad (2.9—4)$$

只要用曲面片将Ω化为(二维)单连通区域，再用(2·9)即可证得(2.9—4)，其中设Σ在$\tilde{\Sigma}$的外侧且不相交。

作为练习，建议读者证明上述二种情况下的奥高公式仍然成立。

例11 求$\vec{F}=\{x,y,z\}$穿过正六面体Σ：$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$外侧的矢通量。

解 因为$F_x=x$，$F_y=y$，$F_z=z$；

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial F_y}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial F_z}{\partial z}=1,\quad \nabla\cdot\vec{F}=3.$$

所以，
$$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{ds}=\iiint_{\Omega}3dV=\int_0^a\int_0^a\int_0^a 3dV=3a^3.$$

与例5比较，这里的计算就简单多了。用奥高公式计算矢通量，通常比较简单，但应注意满足定理中的条件。

例12 由点电荷产生的静电场$\vec{E}$(参见§2.2)，若把点电荷置于坐标原点，则$\vec{E}$穿过包含原点的任一闭曲面Σ的矢通量

$$\Phi_E=\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{q}{\varepsilon}.$$

但这一结果，并不能应用定理2.1得到；因为由Σ所围的区域Ω，包含坐标原点，而E_x，E_y，E_z在原点是没有定义的，不满足定理的条件。如果Σ及其所围的区域Ω，不包含原点(即点电荷在这个区域的外部)，则$\vec{E}=\{E_x,E_y,E_z\}$满足定理的条件，且

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right),$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right);$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)$$

所以 $\nabla\cdot\vec{E}=0$， 从而

$$\Phi_V=\oiint_S\vec{E}\cdot\vec{dS}=\iiint_\Omega\rho dV=0.$$

这一计算结果表明，没有电荷的区域是 $\vec{E}$ 通量(或通量容量)为零的无源区域。

3.2 旋转量与矢通量关系

引理 设 $\vec{F}=\{F_x,F_y\}$ 为平面矢量场，E_x,F_y 在平面光滑闭曲线 C 上及其所围的平面区域 D 内(如图2—16)，具有一阶连续偏导数；则有格林公式：

$$\oint\vec{F}\cdot\vec{dl}=\iint_D\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy.$$

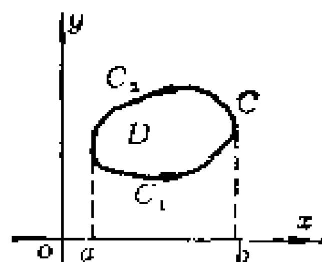


图2—16

其中 C 与区域 D 正向联系。这个公式，表示平面曲线积分与二重积分的关系。

证明 设 D 的边界曲线 C 与平行于坐标轴的直线至多交于两点。先考虑将 C 分为两部分 C_2,C_1，其方程分别为 $y=y_2(x)$，$y=y_1(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$；由二重积分的计算，

$$\iint_D\frac{\partial F_x}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial F_x}{\partial y}dy$$

$$=\int_a^b\{F_x[x,y_2(x)]-F_y[x,y_1(x)]\}dx;$$

又由曲线积分计算

$$\oint_C F_x dx=\int_{C_1}F_x dx+\int_{C_2}F_x dx$$

$$=\int_a^b\{F_x[x,y_1(x)]-F_x[x,y_2(x)]\}dx$$

从而，$$\iint_D \frac{\partial F_x}{\partial y} dxdy = -\oint_C F_x dx.$$

同理可得

$$\iint_D \frac{\partial F_y}{\partial x} dxdy = \oint_C F_y dy,$$

合并上列两式，即得格林公式。

定理2.2 设矢量场 $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$，$F_x$、$F_y$、$F_z$ 在任一光滑闭曲线l上，及以l为边界所绷的光滑曲面Σ'上，具有一阶连续偏导数；则

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dl} = \iint_{\Sigma'} \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{dS}. \tag{2.10}$$

这个公式，称为**斯托克司公式**。其中，l与Σ'正向联系；$\nabla \times \vec{F}$

$$= \left\{ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z},\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\}.$$

证明 设Σ'与平行于z轴的直线，至多交于一点，Σ'的方程为$z = z(x,y)$；而Σ'取上侧，l与Σ'正向联系，它们在XOY平面上的投影曲线为C，投影区域为D且与C正向联系（如图2—17），曲面元素矢量$\vec{ds} = \{dydz,\ dzdx,\ dxdy\}$，取$\Sigma'$为正侧，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是与此侧相应的法方向余弦，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

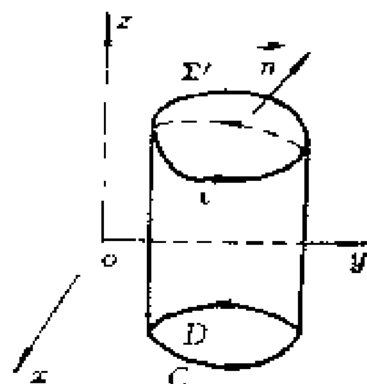


图2—17

由于曲面元素ds在XOY，XOZ平面的投影可分别表示为 $dxdy = \cos\gamma ds$，$dzdx = \cos\beta ds$，即有

$dzdx = -\dfrac{\partial z}{\partial y} dxdy$，故

$$\iint_{\Sigma'}\frac{\partial F_x}{\partial y}dxdy-\frac{\partial F_x}{\partial z}dxdz=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}+\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_{D}\left(\frac{\partial F_x(x,y,z(x,y))}{\partial y}+\frac{\partial F_x(x,y,z(x,y))}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy.$$

又因为 $\oint_l F_x dx=\oint_C F_x(x,y,z(x,y))dx$,

右边应用格林公式，得

$$\oint_C F_x(x,y,z(x,y))\,dx$$

$$=-\iint_D\frac{\partial}{\partial y}[F_x(x,y,z(x,y))]dxdy$$

$$=-\iint_D\left[\frac{\partial F_x(x,y,z(x,y))}{\partial y}+\frac{\partial F_x(x,y,z(x,y))}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy$$

从而得出

$$-\oint_l F_x dx=\iint_{\Sigma'}\frac{\partial F_x}{\partial y}dxdy-\frac{\partial F_x}{\partial z}dxdz, \qquad (2.10—1)$$

同理可证

$$-\oint_l F_y dy=\iint_{\Sigma'}\frac{\partial F_y}{\partial z}dydz-\frac{\partial F_y}{\partial x}dydx. \qquad (2.10—2)$$

$$-\oint_l F_z dz=\iint_{\Sigma'}\frac{\partial F_z}{\partial x}dzdx-\frac{\partial F_z}{\partial y}dzdy. \qquad (2.10—3)$$

(2.10—1)+(2.10—2)+(2.10—3)，整理后即得(2.10)。

定理2.2说明，对于矢量场$\vec{F}$存在一个矢量场$\nabla\times\vec{F}$，而且$\vec{F}$沿l正向的旋转量，就等于$\nabla\times\vec{F}$穿过Σ'正侧的矢通量。这样，在满足定理的条件下，旋转量的计算可以转化为矢通量的计算。

对于静磁场$\vec{H}$，它所产生的矢量场就是电流密度矢量场$\vec{\delta}$（参见§2.4），因此$\vec{H}$沿场中任一闭曲线l正向的旋转量，就是$\vec{\delta}$穿过由l所绷曲面Σ'（电流流过Σ'）矢通量（总电流量）。

在定理2.2中，若$\vec{F}=\{F_x,F_y\}$为平面矢量场，l为XOY平面的闭曲线，Σ'为以l为边界的平面区域D，则格林公式可写作

$$\oint_l \vec{F}\cdot\vec{dl}=\iint_D \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{dS}$$

$\vec{ds}$为D的面积元素矢量。因此，格林公式是斯托克司公式的特例。

例13 设矢量场$\vec{F}=\{y,z,x\}$，求$\vec{F}$沿圆周l：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$从OX轴正向看去，依反时针方向的旋转量。

解 （如图2—18）因为Σ'是平面

$$x+y+z=0$$

上的，以l为边界曲线的圆域，取l与Σ'正向联系，则Σ'正侧的法方向$\vec{n}$，与X，Y，Z轴正向夹角α,β,γ均为锐角；因而，可算出

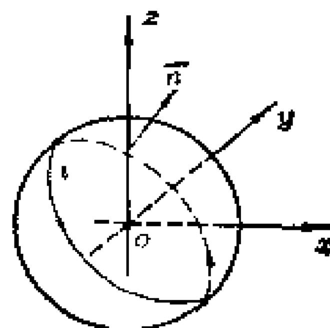


图2—18

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

又因为 $F_x=y$，$F_y=z$，$F_z=x$，则

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=1,\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F_x}{\partial y}=1;$$

于是，$\nabla\times\vec{F}=\{-1,\ -1,\ -1\}$。

由斯托克司公式：

$$\oint_l \vec{F}\cdot\vec{dl}=\iint_{\Sigma'}(-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)dS$$

$$=-\sqrt{3}\iint_{\Sigma'}dS=-\pi a^2\sqrt{3}.$$

3.3 矢通量$\Phi_0=0$的条件

定理2.3 设$\vec{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$，F_x，F_y，F_z在单连通区域Ω内，有一阶连续偏导数，则下列三条件等价：

(1) 在Ω内任一闭曲面Σ'，

$$\Phi_0=\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=0;$$

(2) 在Ω内任一块曲面Σ'，

$$\Phi=\iint_{\Sigma'}\vec{F}\cdot\vec{dS}$$

与曲面Σ'的形状无关，而只与Σ'的边界曲线l及其方向有关；

(3) 在Ω内每一点，有

$$\nabla\cdot\vec{F}=0.$$

证明 (1)→(2) 若(1)成立，在Ω内任取一闭曲线l，以l为边界，在Ω内任作两曲面Σ'、Σ''，而且与l正向联系（如图2—19）。记Σ''的负侧为Σ''_-，则

$$\iint_{\Sigma'}\vec{F}\cdot\vec{dS}-\iint_{\Sigma''}\vec{F}\cdot\vec{dS}$$

$$=\iint_{\Sigma'}\vec{F}\cdot\vec{dS}+\iint_{\Sigma''_-}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\oiint_{\Sigma'+\Sigma''_-}\vec{F}\cdot\vec{dS}=0.$$

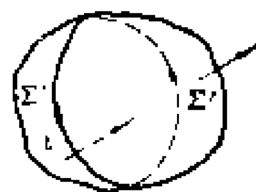


图2—19

即 $$\iint_{\Sigma'}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iint_{\Sigma''}\vec{F}\cdot\vec{dS},$$

故(2) 成立。

(2)→(3)。若(2) 成立，如果在Ω内，有某一点P使得

$\nabla\cdot\vec{F}>0$，则由偏导数的连续性，在Ω内，作以P点为心的某一球面$\widetilde{\Sigma}$及其所围的区域$\widetilde{\Omega}$内也成立。从而

$$\iiint\limits_{\widetilde{\Omega}}\nabla\cdot\vec{F}dV>0,$$

由定理2.1 对于$\widetilde{\Sigma}$的外侧，有

$$\oiint\limits_{\widetilde{\Sigma}}\vec{F}\cdot\vec{dS}>0.$$

将$\widetilde{\Sigma}$分为两个半球Σ'，Σ''，而且与它们的边界l正向联系，则得

$$\iint\limits_{\Sigma'}\vec{F}\cdot\vec{dS}\neq\iint\limits_{\Sigma''}\vec{F}\cdot\vec{dS},$$

与所设矛盾，故(3)成立。

(3)→(1)。若(3)成立，由定理2.1，即得(1)成立。定理证毕。

定理2.3说明，矢量场$\vec{F}$穿过场中任一闭曲面的矢通量$\Phi_0=0$的各种转化形式；定理中的每一个条件，都是另一个条件的充要条件。从而，建立了判断矢量场$\vec{F}$的矢通量$\Phi_0=0$的各种准则。

例14 判断下列矢量场$\vec{F}$，穿过场任一闭曲面Σ的矢通量Φ_0，是否为零：

(1) $\vec{F}=\{x,y,z\}$；

(2) $\vec{F}=\{a_2z-a_3y,\ a_3x-a_1z,\ a_1y-a_2x\}$

解 (1) 因为$F_x=x$，$F_y=y$，$F_z=z$；

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial F_y}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial F_z}{\partial z}=1,$$

所以 $\nabla\cdot\vec{F}=3\neq0$。

从定理2.3知

$$\Phi_0 = \oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dS} \neq 0。$$

于是，矢量场$\vec{F}$，在场中任一闭区域内，都是有源的。显然，矢通量$\Phi = \iint_{\Sigma'} \vec{F} \cdot \vec{dS}$的值与曲面$\Sigma'$的形状及其边界都有关了（参看例5）。

（2） 因为

$$F_x = a_2 z - a_3 y,$$

$$F_y = a_3 x - a_1 z,$$

$$F_z = a_1 y - a_2 x;$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0,$$

故 $\nabla \cdot \vec{F} = 0。$

所以，矢量场$\vec{F}$在场中任一闭区域内是无源的。显然，由奥高公式，对于任一闭曲面Σ

$$\Phi_0 = \oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dS} = 0。$$

与Σ的形状无关。

例15 研究直电流产生的静磁场

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$$

作为空间的点函数，在坐标原点是没有定义的。但除原点外，有

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{2Ixy}{2\pi r^4}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{-2Ixy}{2\pi r^4}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0;$$

所以 $\nabla \cdot \vec{H} = 0。$

从而，$\vec{H}$穿过不含原点的任一区域内的闭曲面Σ的$\vec{H}$通量$\Phi_H = \oiint_{\Sigma} \vec{H} \cdot \vec{dS} = 0$。但当$\Sigma$及其所围的区域包含原点时，不能应用定理2.3。

然而，在§2.2中已讨论过，对于静磁场在场中任一闭区域内，都是无源的。

3.4 旋转量为零的条件

定理2.4 设$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$，$F_x, F_y, F_z$，在单连通区域$\Omega$内，具有一阶连续偏导数，则下列四个条件等价：

(1) $\vec{F}$沿Ω内的任一闭曲线l的旋转量

$$\Psi_0 = \oint_l \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0.$$

(2) $\vec{F}$沿Ω内任一曲线弧段$\widehat{M_0M}$的线积分

$$\int_{\widehat{M_0M}} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

与积分路线无关，而只与路线的起点、终点有关。这种线积分，常记作$\int_{M_0}^{M} \vec{F} \cdot \vec{dl}$。

(3) 在Ω内存在函数$U(x, y, z)$，使得它的全微分：

$$dU = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x dx + F_y dy + F_z dz;$$

这样的函数$U(x, y, z)$，称为矢量场$\vec{F}$的**位函数**（或称**势函数**）。

(4) 在Ω内每一点，有

$$\nabla \times \vec{F} = 0.$$

证明 (1)→(2)。若(1)成立，在Ω内任取两点M_0、M；并在Ω内任取两曲线弧

$\widehat{M_0PM}$、$\widehat{M_0QM}$（如图2—10）。于是，

$$\int_{\widehat{M_0PM}} \vec{F}\cdot\vec{dl} - \int_{\widehat{M_0QM}} \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_{\widehat{M_0PM}} \vec{F}\cdot\vec{dl} + \int_{\widehat{MQM_0}} \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_{\widehat{M_0PMQM_0}} \vec{F}\cdot\vec{dl} = 0$$



图2—20

所以 $\displaystyle\int_{\widehat{M_0PM}} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{\widehat{M_0QM}} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{M_0}^{M} \vec{F}\cdot\vec{dl}$，即 (2)成立。

(2) →(3)．若(2)成立，在 Ω 内取一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，另取一动点 $M(x, y, z)$；则 $\vec{F}$ 从 M_0 到 M 的线积分，是 M 点的单值函数记作

$$U(x, y, z) = \int_{M_0}^{M} \vec{F}\cdot\vec{dl}.$$

当 M 变到 Ω 内的点 $M_1(x+\triangle x, y, z)$ 时，由于积分与路线无关，所以 M_0 到 M_1 的积分路线可以取得使它通过点 M，于是

$$\Delta U = U(M_1) - U(M) = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F}\cdot\vec{dl} - \int_{M_0}^{M} \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_{M}^{M_1} \vec{F}\cdot\vec{dl}.$$

因为 Δx 可取得充分小，使得由 M 到 M_1 的积分路线取为线段 $\overline{MM_1}$ 且全部落在 Ω 内；又因为 M 到 M_1 时，y，z 为常数，故

$dy = dz = 0$，从而

$$\Delta U = \int_{M}^{M_1} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_x(x, y, z)dx,$$

应用积分中值定理，得

$$\Delta U = F_x(x+\theta x, y, z)\Delta x, \quad (0<\theta<1)$$

于是 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F_x(x+\theta\Delta x, y, z)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= F_x(x, y, z)$$

即 $$\frac{\partial U}{\partial x}=F_x(x, y, z).$$

同理可证

$$\frac{\partial U}{\partial y}=F_y(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial z}=F_z(x, y, z).$$

因为 $$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

故 $$dU=\vec{F}\cdot\vec{dl}$$

即（3）成立。

（3）→（4）。若（3）成立，即$dU=\vec{F}\cdot\vec{dl}$，则

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

因此 $$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}.$$

根据 $$\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z},$$

故 $$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=0.$$

同理可得$\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0.$

从而 $$\nabla\times\vec{F}=0$$

即(4)成立。

(4)→(1)。若(4)成立，即$\nabla\times\vec{F}=0$，则对于在Ω内的任一块光滑曲面Σ'及其边界l(光滑闭曲线)，且Σ'与l正向联系，由斯托克司公式，即得

$$\Psi_0=\oint_l\vec{F}\cdot\vec{dl}=0.$$

即(1) 成立，定理证毕。

定理2.4说明，矢量场$\vec{F}$沿场中任一闭曲线的旋转量$\Psi_0=0$的各种转化形式，即定理中的每一个条件，是另一个条件的充要条件。从而建立了判断矢量场$\vec{F}$的旋转量$\Psi_0=0$的各种准则。

现在，我们讨论**位函数**U的**求法**。

由于定理2.4的条件是等价的，所以对于矢量场$\vec{F}$只要满足定理的条件(1) —(4) 中之一，就存在位函数U。因为

$$U(x,\ y,\ z)=\int_{M_0}^{M}\vec{F}\cdot\vec{dl},$$

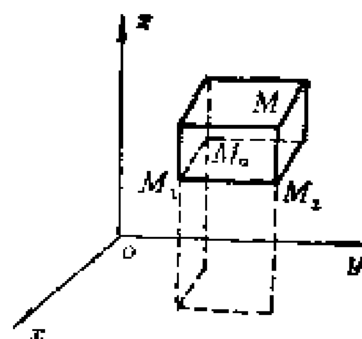


图2—21

积分与积分路线无关；其中定点为$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，终点为$M(x,\ y,\ z)$。在Ω内，取平行于坐标轴的折线$\overline{M_0M_1M_2M}$，作为积分路线（如图2—21）。在$\overline{M_0M_1}$上，$y=y_0$，$z=z_0$，因而$dy=0$，$dz=0$；在$\overline{M_1M_2}$上$z=z_0$因而$dx=0$，$dz=0$；在$\overline{M_2M}$上$dx=0$，$dy=0$。由此可得

$$\begin{aligned}U(x,\ y,\ z)-U(x_0,\ y_0,\ z_0)=&\int_{x_0}^{x}F_x(x,y_0,z_0)dx\\&+\int_{y_0}^{y}F_y(x,y,z_0)dy\\&+\int_{z_0}^{z}F_z(x,y,z)dz.\end{aligned}\tag{2.11—1}$$

这样，就把求$\vec{F}$的位函数U的问题化为计算普通定积分(2.11—1)的问题了。

应该经常注意，并不是任一矢量场$\vec{F}$，都有位函数U；当且仅当$\vec{F}$满足定理2.4的等价条件之一时，才存在位函数U，也

只有在这种情况下，才能应用公式(2.11—1)计算U。计算中，M_0的适当选择，可使计算简化；选取不同的起点M_0，算得的位函数之间只差一个常数。这是因为，当$dU=\vec{F}\cdot\vec{dl}$时，则

$$d(U+c)=\vec{F}\cdot\vec{dl};$$

所以，$U+c$亦为$\vec{F}$的位函数，其中c为任意常数。因此，位函数一般可表示为

$$U(x,y,z)=\int_{M_0}^{M}\vec{F}\cdot\vec{dl}+c; \qquad (2.11—2)$$

又由于，当$M=M_0$时，从上式得$c=U(x_0, y_0, z_0)$。所以，计算$\vec{F}$从M_0到M的线积分，可简单地表示为

$$\int_{M_0}^{M}\vec{F}\cdot\vec{dl}=\int_{M_0}^{M}dU=U(M)-U(M_0)。 \qquad (2.11—3)$$

下面我们讨论$\vec{F}$的位函数U一个有用的**性质**.因为$U(x,y,z)$是数量场。若它的任意两个等量面为

$$U(x, y, z)=c_1,\quad U(x, y, z)=c_2.$$

设M_1，M_2分别为这两个等量面上的任意点，则从(2.11—3)得

$$\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}\cdot\vec{dl}=U(M_2)-U(M_1)=c_2-c_1. \qquad (2.11—4)$$

这个公式，表示数量场U的任意两个等量面间矢量场$\vec{F}$所取的线积分值相等。这个性质在研究有位函数的物理矢量场时常常要用到。

例16 判断下列矢量场$\vec{F}$在场中任一闭曲线l上的旋转量是否为零：

(1) $\vec{F}=\{x, y, z\}$;

(2) $\vec{F}=\{a_2z-a_3y,\ a_3x-a_1z,\ a_1y-a_2x\}$

解 (1) 因为$F_x=x$，$F_y=y$，$F_z=z$，

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0.$$

所以$\nabla \times \vec{F} = 0$。

从定理2.4，得

$$\Psi_0 = \oint_l \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0;$$

即$\vec{F}$沿场中任一闭曲线l是无旋的。从而，$\vec{F}$有位函数$U(x, y, z)$，由公式(2.11—1)，得

$$U(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$= \int_0^x x dx + \int_0^y y dy + \int_0^z z dz$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

于是，$\vec{F}$的所有位函数$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + c$，$c$为任意常数。

因为U的等量面是中心在原点的一族球面。设M_1，M_2分别为U的等量面：

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$，$x^2 + y^2 + z^2 = 9$上的任意点，则由公式(2.11—4)，得

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = 9 - 4 = 5.$$

(2) 容易算得

$$\nabla \times \vec{F} = \{2a_1, 2a_2, 2a_3\} \neq 0$$

其中，a_1、a_2、a_3，不同时为零的常数。因此，$\vec{F}$在场中任一闭曲线l上，是有旋的。$\vec{F}$当然也就不存在位函数。

例17 研究点电荷产生的静电场

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r},$$

作为空间点函数，在坐标原点，是没有定义的。因此，除原点外，有

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-3yz}{r^5}-\left(\frac{-3zy}{r^5}\right)\right],$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-3xz}{r^5}-\left(\frac{-3xz}{r^5}\right)\right],$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-3xy}{r^5}-\left(\frac{-3xy}{r^5}\right)\right];$$

从而，$\nabla\times\vec{E}=0$。由定理2.4，$\vec{E}$在不含原点的区域内，沿任一闭路l的旋转量

$$\oint_l\vec{E}\cdot\vec{dl}=0.$$

若$\vec{E}$在含原点的区域内，不能应用定理2.4得出这一结论，但由§2.4知$\vec{E}$沿场中任一闭路的旋转量均为零。即$\vec{E}$在场中任一闭曲线上是无旋的；或者电场力$\vec{F}=q'\vec{E}$，移动单位正电荷沿场中任一闭路旋转一周所作的功为零。

现在，求$\vec{E}$的位函数U。因为

$$dU=\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}\cdot\vec{dl}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}rdr$$

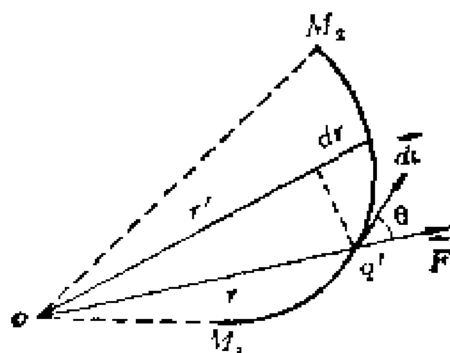


图2—22

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon} d\left(-\frac{1}{r}\right),$$

其中 $\vec{r} \cdot \vec{dl} = rdl\cos\theta$

$= rdr$（如图2—22）。

所以 $$U = -\frac{q}{4\pi\varepsilon r}.$$

即 $\vec{E}$ 的位函数 $U = -V$；V 为电位。读者可以由（2.11—1）求得 U。

因而，电场 $\vec{F}$ 从异于原点的 M_1，移动试验正电荷 q' 到 M_2 所作的功（如图2—22）。

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r(M_1)} - \frac{1}{r(M_2)}\right);$$

或对移动单位正电荷时，则

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r(M_1)} - \frac{1}{r(M_2)}\right)$$

$$= V(M_1) - V(M_2),$$

只与试验电荷的大小、起点和终点有关，而与路线无关。$V(M_1)$、$V(M_2)$ 表示在 M_1，M_2 的电位（参见例10）。

由于 V 的等电位面，为一族形如

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

的球面（参见，第二章§1例3）。若 M_1，M_2 分别为等电位面 $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$，$x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2$ 上的任意点，则由（2.11—4）知，这两个等电位面间的电位差相等。

例18 设力场 $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$，$\vec{F}$ 沿场中任一闭路 l 所作的功为零，则 $\vec{F}$ 遵守机械能守恒原理。

证明 因为 $\oint_l \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0$，由定理2·4知存在位函数 U，使得

$dU=\vec{F}\cdot\vec{dl}$，即

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=F_y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=F_z.$$

设$\vec{F}$沿场中曲线：$x=x(t),y=y(t),z=z(t),t_1\leqslant t\leqslant t_2$.由牛顿第二定律：$\vec{F}=m\vec{a}$，故

$$mx''(t)=\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$my''(t)=\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$mz''(t)=\frac{\partial U}{\partial z},$$

易知 $\quad m[x''(t)x'(t)+y''(t)y'(t)+z''(t)z'(t)]$

$$=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

上式两边对t从t_1到t_2积分，注意到

$$U(t)=U(x(t),y(t),z(t)),$$

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

则积分后得

$$\frac{m}{2}\{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2\}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$=U(t_2)-U(t_1)$$

因为位能$V(t)=-U(t)$，从而由上式就得到了著名的机械能守恒原理

$$\frac{m}{2}\{[x'(t_2)]^2+[y'(t_2)]^2+[z'(t_2)]^2\}+V(t_2)$$

$$=\frac{m}{2}\{[x'(t_1)]^2+[y'(t_1)]^2+[z'(t_1)]^2\}+V(t_1).$$

证毕.

第三章　场的空间变化率

对于场，除了必须研究它在某一区域内的变化性质(即，场积分及其间的关系)外，还需要更深入、而且更重要的是研究场中每一点的变化特性．这样，才能充分认识和掌握场的量变规律，判断整个场的性质，弄清楚各种场之间的关系，而使得我们对场有一个统一的认识．

场的空间变化率，是表述场中每一点的变化特性的量，是场的微分性质，是描述场的量变规律的主要概念．

本章，研究场的各种空间变化率及它们之间的关系，同时研究它们与场积分的联系．

§1　数量场的梯度

梯度是描述数量场每一点的最大空间变化率的一个矢量，是一种场微分．

1.1　梯度概念　为了研究数量场的梯度，我们首先引进方向导数及其计算方法．

设给定数量场$f(M)$和场中一点M，过M任引一方向$\vec{l}$（如图3—1)，当$\vec{l}$上的动点P沿$\vec{l}$趋近于M时，若极限



图3—1

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(P)-f(M)}{\Delta l}$$

(其中$|\overrightarrow{\Delta l}|=\Delta l=|\overrightarrow{MP}|$)存在；则该极限值，称为数量场$f(M)$，

在M点沿$\vec{l}$方向的方向导数（或方向变化率），记作$\frac{\partial f}{\partial l}$.在空间直角坐标系下，设过$M(x,y,z)$引的方向$\vec{l}$的方向角为$\alpha$，$\beta$，$\gamma$；如果$f(x,y,z)$在$M$点具有连续偏导数，则有计算公式：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{3.1}$$

事实上，在$OXYZ$直角坐标系下，设P点的坐标为$(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$，则有

$$\Delta x=(\overrightarrow{\Delta l})_X=\Delta l\cos\alpha;$$
$$\Delta y=(\overrightarrow{\Delta l})_Y=\Delta l\cos\beta;$$
$$\Delta z=(\overrightarrow{\Delta l})_Z=\Delta l\cos\gamma.$$

由全微分概念，$\Delta f=df+\eta$，其中η是当$\Delta l\to0$时，比Δl较高阶的无穷小量，于是，

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to0}\frac{\Delta f}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to0}\frac{df+\eta}{\Delta l}$$

$$=\lim_{\Delta l\to0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\partial l}+\frac{\eta}{\Delta l}\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

即为(3.1)。由此可见，求方向导数的计算，就化为求偏导数和给定方向的方向余弦的计算。显然，当$\vec{l}$取平行于坐标轴的方向时，则方向导数就是偏导数。如方向导数作为一个数量函数，其值决定于给定的点M和过M点引的方向$\vec{l}$.

例1 求$f(x,y,z)=xyz+z^2+5$在$M(x,y,z)$点沿$\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$的方向导数，其中$M_1(1,1,0)$、$M_2(3,2,1)$.

解 因为$\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,1,1\}$，它的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{6}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

而 $$\frac{\partial f}{\partial x}=yz,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=xz,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=xy+2z.$$

所以 $$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{2yz}{\sqrt{6}}+\frac{xy}{\sqrt{6}}+\frac{xy+2z}{\sqrt{6}}.$$

例2 求电位场

$$V(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

在异于原点的点$M(x,y,z)$，沿等电位面的外法线方向变化率。

解 因为等电位面，是球心在原点的球面；所以，它的外法矢量$\vec{n}$的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r},$$

又因为

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{qx}{4\pi\varepsilon r^3},\quad \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{qy}{4\pi\varepsilon r^3},\quad \frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{qz}{4\pi\varepsilon r^3};$$

所以 $$\frac{\partial V}{\partial n}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{x^2}{r^4}+\frac{y^2}{r^4}+\frac{z^2}{r^4}\right)$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

数量场的方向导数，仅仅表明，场在给定点，沿过该点的某一方向的变化率。但场中每一给定点，都可以引任意多个方向；而且，沿其中任一方向，一般都有一个方向变化率；因此，这并不足以表述场中每一点的变化特性。于是，引进**梯度的概念**。

定义 设给定数量场$f(M)$及场中一点M，若过M点有一矢量$\vec{G}$，使得$f(M)$在M点，沿$\vec{G}$的方向变化率最大；同时，规定$\vec{G}$的模等于这个最大值，则矢量$\vec{G}$称为数量场$f(M)$，在M点的最

大空间变化率，简称为梯度；记作

$$\vec{G}=\mathrm{grad}\,f(M)。$$

梯度定义表述了数量场$f(M)$在M点的最大方向变化率和取得这个最大值的方向。从而梯度描述了矢量场在给定点处变化率的特性。所以梯度 $\mathrm{grad}\,f(M)$ 又可看作空间点的矢量函数 是由数量场 $f(M)$ 产生的，而它又描述该场的最大空间变化率 的变化特性的矢量场。为明确计，我们作如下定义：

定义 对于给定的矢量场$\vec{G}(M)$，若存在一数量场 $f(M)$，使得$\vec{G}(M)=\mathrm{grad}\,f(M)$，则称该矢量场为梯度场。

如果$f(M)$是具有物理属性的，则$\mathrm{grad}\,f(M)$是有物理意义的矢量场，表述场中每一点的物理特性。例如，考察电位场 V，因为在静电场中每一点不仅有一个电位 V，同时也有一个电场强度$\vec{E}$。当单位正电荷从M点沿方向 $\vec{l}$ 移动到与M点充分接近的P点时（如图3—2），位移为 $\vec{\Delta l}$，且$|\vec{\Delta l}|=|\vec{MP}|=\Delta l$；$\vec{E}$ 与$\vec{\Delta l}$的夹角为θ；若在MP段把$\vec{E}$ 看作不变，则电场力所作的功可以近似地表示为

$$V(M)-V(P)=|\vec{E}|\cos\theta\Delta l;$$

其中$V(M)$，$V(P)$分别为起点M，终点P的电位，因为M点与P点的电位差$\Delta V=V(P)-V(M)$，所以

$$\Delta V=-|\vec{E}|\cos\theta\Delta l。$$

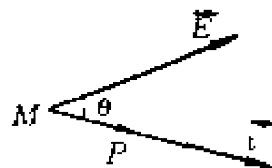


图3—2

于是，电位场V，在M点沿$\vec{l}$ 的方向导数

$$\frac{\partial V}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta l}=-|\vec{E}|\cos\theta;$$

当$\theta=\pi$时，$\cos\theta=-1$；此时，$\frac{\partial V}{\partial l}$取得最大方向变化率，

$$\frac{\partial V}{\partial l}=|\vec{E}|,$$

而取得这一最大值的方向，就是电场强度$\vec{E}$(M)的负方向。由梯度的定义，电位V的梯度：

$$\vec{E} = -\text{grad}V \tag{3.2}$$

称为电位梯度。

(3.2)表述了静电场中$\vec{E}$和V的基本关系，这一关系，使我们对静电场的性质有一个统一的观念。这一个关系在实际应用上的重要性，在于我们可以先计算V，从而求得$\vec{E}$。

从(3.2)可知，$\vec{E}$与grad$V$的方向相反，模相等。由于在$\frac{\partial V}{\partial l} = -|\vec{E}|\cos\theta$中，当$\theta=0$时，$\cos\theta=1$，$\frac{\partial V}{\partial l}$取得最小值，即$\frac{\partial V}{\partial l} = -|\vec{E}|$；而取得这个最小值的方向，就是$\vec{E}$的正方向。所以，在静电场中，$\vec{E}$的方向是场中电位下降最快的方向，而grad$V$的方向，是场中电位升得最快的方向。

1.2 梯度计算与性质 下面我们讨论梯度在空间直角坐标下的计算及其性质。

定理3.1 设数量场$f=f(x,y,z)$在点$M(x,y,z)$具有一阶连续偏导数，则

$$\text{grad} f = \nabla f \tag{3.3}$$

其中 $\nabla f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$。

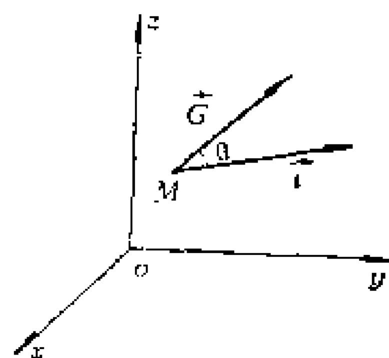


图3-3

证明 设$\vec{l^0}$为过M点，给定方向$\vec{l}$上的单位矢量，则

$$\vec{l^0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\};$$

其中α，β，γ为$\vec{l}$的方向角。令

$$\vec{G} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\},$$

θ为$\vec{G}$与$\vec{l}$的夹角(如图3—3). 于是，由(3.1)和点积的意义，得

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{G}\cdot\vec{l^0}=|\vec{G}|\cos\theta;$$

当$\theta=0$时，$\cos\theta=1$，则$\frac{\partial f}{\partial l}=|\vec{G}|$为最大值；而取得这个最大值的方向即为$\vec{G}$的方向. 由梯度的定义，得

$$\mathrm{grad}f=\vec{G}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right\}=\nabla f.$$

定理证毕.

定理3.1说明，对于数量场f，必存在一个描述场中每一点的最大空间变化率的矢量场——梯度场；把求梯度 $\mathrm{grad}f$ 的计算，化为求∇f的微分运算，且由公式（3.3)求得. 所以，**梯度是场的一种微分性质**.

从定理3.1容易得到梯度的**基本运算法则**：

(1) $\mathrm{grad}c=0$，$\nabla c=0$；

(2) $\mathrm{grad}(cf)=c\,\mathrm{grad}f$，$\nabla(cf)=c\nabla f$；

(3) $\mathrm{grad}(f_1\pm f_2)=\mathrm{grad}f_1\pm\mathrm{grad}f_2$，

$\nabla(f_1\pm f_2)=\nabla f_1\pm\nabla f_2$；

(4) $\mathrm{grad}(f_1f_2)=f_2\mathrm{grad}f_1+f_1\mathrm{grad}f_2$，

$\nabla(f_1f_2)=f_2\nabla f_1+f_1\nabla f_2$；

(5) $\mathrm{grad}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)=\frac{1}{f_2^2}\left(f_2\mathrm{grad}f_1-f_1\mathrm{grad}f_2\right)$，

$\nabla\left(\frac{f_1}{f_2}\right)=\frac{1}{f_2^2}\left(f_2\nabla f_1-f_1\nabla f_2\right)$；

(6) $\mathrm{grad}f(f_1)=\frac{df}{df_1}\mathrm{grad}f_1$，

$$\nabla f(f_1) = \frac{df}{df_1}\nabla f_1,$$

其中f_1，f_2，f为具有连续偏导数的数量场，而(6)表示复合场$f(f_1)$的梯度求法。

事实上，$\text{grad}(f_1 \pm f_2) = \nabla(f_1 + f_2)$

$$= \left\{\frac{\partial(f_1 \pm f_2)}{\partial x},\ \frac{\partial(f_1 \pm f_2)}{\partial y},\ \frac{\partial(f_1 \pm f_2)}{\partial z}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial f_1}{\partial x} \pm \frac{\partial f_2}{\partial x},\ \frac{\partial f_1}{\partial y} \pm \frac{\partial f_2}{\partial y},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} \pm \frac{\partial f_2}{\partial z}\right\}$$

$$= \nabla f_1 \pm \nabla f_2 = \text{grad} f_1 \pm \text{grad} f_2,$$

即为(3)。

$$\text{grad} f(f_1) = \nabla f(f_1)$$

$$= \left\{\frac{\partial f(f_1)}{\partial x},\ \frac{\partial f(f_1)}{\partial y},\ \frac{\partial f(f_1)}{\partial z}\right\}$$

$$= \left\{\frac{df}{df_1}\frac{\partial f_1}{\partial x},\ \frac{df}{df_1}\frac{\partial f_1}{\partial y},\ \frac{df}{df_1}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\}$$

$$= \frac{df}{df_1}\nabla f_1 = \frac{df}{df_1}\text{grad} f_1,$$

即为(6)。其余作为练习，建议读者加以证明。

例如，设矢量场$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$，$\vec{G} = \{G_x, G_y, G_z\}$具有连续偏导数。因为 $\vec{F}\cdot\vec{G} = F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z$ 是一个数量场，所以$\vec{F}\cdot\vec{G}$的梯度可用公式(3)、(4)求得，即

$$\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \nabla(F_xG_x) + \nabla(F_yG_y) + \Delta(F_zG_z)$$

$$= (F_x\nabla G_x + G_x\nabla F_x) + (F_y\nabla G_y + G_y\nabla F_y)$$

$$+ (F_z\nabla G_z + G_z\nabla F_z).$$

特别，如果$\vec{F}$为常矢量，$\vec{G} = \vec{r} = \{x, y, z\}$为一矢径，则

$$\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \nabla(\vec{F}\cdot\vec{r}) = \nabla(xF_x) + \nabla(yF_y) + \nabla(zF_z)$$

$$= \{F_x,\ F_y,\ F_z\} = \vec{F}.$$

梯度具有下列重要性质：

性质1 方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$等于梯度$\mathrm{grad} f$在该方向上的投影，即

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(\mathrm{grad} f)_{\vec{l}}=\vec{l^0}\cdot\nabla f \tag{3.4}$$

其中$\vec{l^0}$为方向$\vec{l}$上的单位矢量。

事实上，由定理3.1知$\mathrm{grad} f=\nabla f$，故

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\\&=\vec{l^0}\cdot\nabla f=(\nabla f)_{\vec{l}}\\&=(\mathrm{grad} f)_{\vec{l}}.\end{aligned}$$

从性质1知，当$\theta=(\vec{l},\nabla f)=0$时，$\frac{\partial f}{\partial l}$不仅是正的，而且取得最大值$|\nabla f|$，即$\frac{\partial f}{\partial l}=|\mathrm{grad} f|>0$。又因为$\frac{\partial f}{\partial l}>0$表示数量场$f$沿$\vec{l}$方向变化是上升的，所以梯度$\mathrm{grad}\ f$是$f(M)$在$M$点处上升得最快的方向。当$\theta=\pi$时，$\frac{\partial f}{\partial l}$不仅是负的，而且取得最小值$-|\nabla f|$，即$\frac{\partial f}{\partial l}=-|\mathrm{grad}\ f|<0$。因为$\frac{\partial f}{\partial l}<0$表示数量场$f$沿$\vec{l}$方向变化是下降的，所以梯度的反方向(即$-\mathrm{grad}\ f$)是$f(M)$在$M$点下降得最快的方向。

性质2 数量场f中任一点M的梯度，垂直于过此点的等量面，且指向$f(M)$上升的方向。从而又有

$$\mathrm{grad}\ f=\frac{\partial f}{\partial n}\vec{n^0} \tag{3.4$_2$}$$

其中$\vec{n^0}$为该等量面的法方向$\vec{n}$的单位矢量。

证明 设过M点的等量面方程为$f(x,y,z)=c$，由于此等量

面的法方向$\vec{n}^0=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$是垂直于过$M$点的切平面的，由$\text{grad}\ f=\nabla f$，则梯度$\text{grad}\ f$与$\vec{n}$的方向相同，即垂直于过此点的等量面。又由性质1的讨论知，梯度是指向$f(M)$上升方向的(即由数值较低的等量面指向数值较高的等量面)，而它的模等于f沿所述法线方向$\vec{n}$的方向导数$\frac{\partial f}{\partial n}$。于是

$$\text{grad}\ f=\frac{\partial f}{\partial n}\vec{n}^0.$$

这一性质称为数量场的梯度与其等量面的正交性质。

例如，对静电场，从(3.2)与性质2知，$\vec{E}$与等电位面正交，即$\vec{E}$线是与等电位面正交的线族。

例3 求数量场$f(x,y,z)=xyz+z^2+5$的梯度场，及在点$M(0,1,-1)$的梯度和$\frac{\partial f}{\partial l}$的最大值，最小值。

解 因为$\frac{\partial f}{\partial x}=yz$，$\frac{\partial f}{\partial y}=xz$，$\frac{\partial f}{\partial z}=xy+2z$由公式(3.3)，得到$f$的梯度场

$\text{grad}\ f=\nabla f=\{yz,\ xz,\ xy+2z\}$，而在$M$点的梯度$\text{grad}\ f(M)=\{-1,\ 0,\ -2\}$；由梯度定义，$\frac{\partial f}{\partial l}$在$M$点的最大值，即为$\frac{\partial f}{\partial l}=|\text{grad}\ f(M)|=\sqrt{5}$；由梯度性质，$\frac{\partial f}{\partial l}$在$M$点的最小值，即为$\frac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt{5}$。

例4 电位$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$，求电场强度$\vec{E}$。

解 $\dfrac{\partial V}{\partial x}=-\dfrac{xq}{4\pi\varepsilon r^3}$,

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{yq}{4\pi\varepsilon r^3},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{zq}{4\pi\varepsilon r^3},$$

由(3.2)得,

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}V=-\nabla V$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\{x,y,z\},$$

即 $$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}.$$

从例2及性质2，得

$$\left|\vec{E}\right|=\left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

因为等电位面，是中心在原点的一族球面（参见第二章例3），而$\vec{E}$的方向是矢径的方向，即球面的外法线方向，所以，grad V的方向是指向原点的内法方向。显然，$\vec{E}$与等电位面正交。

例5 两平行线输电线周围产生的电场，当平行线带有等量异性电荷时，电位

$$V(M)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1};$$

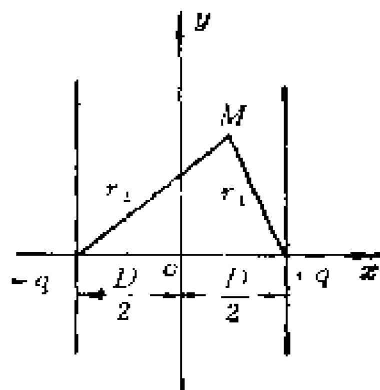


图3—4

其中 $$r_2^2=\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+y^2,$$

$$r_1^2=\left(\frac{D}{2}-x\right)^2+y^2;$$

$M=M(x,y)$，D为两电荷间的距离（如图3—4）。求等电位面

与$\vec{E}$线方程。

解 先求等电位面方程，然后，应用$\vec{E}$与等电位面的正交性，求$\vec{E}$线方程。

为求等电位面方程，令

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}=C;$$

即 $$\frac{r_2}{r_1}=e^{\frac{2\pi\varepsilon C}{q}},$$

又令 $K=e^{\frac{2\pi\varepsilon C}{q}}$，则有$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2=K^2$，从而，经化简后，得

$$x^2+y^2-\frac{K^2+1}{K^2-1}Dx+\frac{D^2}{4}=0; \tag{a}$$

即 $$\left[x+\frac{D}{2}\left(\frac{K^2+1}{K^2-1}\right)\right]^2+y^2=\left(\frac{KD}{K^2-1}\right)^2.$$

为所求的等电位面方程，是以$\left(\pm\frac{D}{2}\frac{K^2+1}{K^2-1},0\right)$为心，$\frac{KD}{K^2-1}$为半径的两族圆柱面；但不是同心的，因为K随所选择的电位不同而改变。等电位面(如图3—5)的实线。

为了求得$\vec{E}$线方程，在(a)中，对x求导数，得

$$2x+2yy'-\frac{K^2+1}{K^2-1}D=0. \tag{b}$$

联立(a)，(b)并消去$\frac{K^2+1}{K^2-1}$，得

$$x^2+y^2-2(x+yy')x+\frac{D^2}{4}=0; \tag{c}$$

为等电位面的微分方程。由于$\vec{E}$线与等电位面正交，则$\vec{E}$线的切线斜率与等电位面的法线的斜率互为负倒数。所以，在(c)

中，以 $-\frac{1}{y'}$ 代 y'，即得 $\vec{E}$ 线微分方程

$$\left(y^2 - x^2 + \frac{D^2}{4}\right)y' + 2xy = 0;$$

即
$$\left(y^2 - \frac{D^2}{4}\right)dy + 2xydx - x^2dy = 0. \qquad (d)$$

(d) 全式乘 $\frac{1}{y^2}$，得

$$\left(1 + \frac{D}{4y^2}\right)dy + \frac{2yxdx - x^2dy}{y^2} = 0;$$

即
$$\left(1 + \frac{D^2}{4y^2}\right)dy + d\left(\frac{x^2}{y}\right) = 0;$$

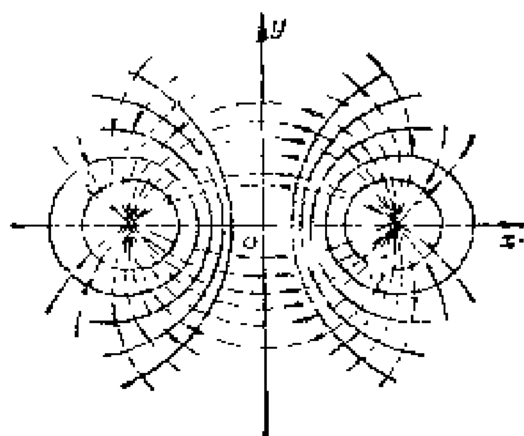


图3—5

积分，得

$$y - \frac{D^2}{4y} + \frac{x^2}{y} = C,$$

其中C为积分常数；化简，得

$$x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + C^2}{4},$$

即为所求的 $\vec{E}$ 线方程，是一族圆心在Y 轴上，且通过点$\left(\pm\frac{D}{2}, 0\right)$的圆弧（如图3—5）的虚线。

1.3　梯度场与场积分关系　定理3.1使我们从一个数量场f获得一个梯度场，且$\mathrm{grad}\, f = \nabla f$。于是根据梯度场的定义，在第二章中的定理 2.4 的等价条件，就表述了一个矢量场 $\vec{F}$ 为梯度场，即存在函数U 使得 $\vec{F} = \mathrm{grad}\, U$ 的各种充要条件：（1）旋转量$\oint_l \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0$，（2）线积分$\int_{M_0}^{M} \vec{F} \cdot \vec{dl}$ 与积分路线$\widehat{M_0M}$无关，只与路线的起点、终点有关。（3）场中（或考虑的区域内）每

一点都有$\nabla \times \vec{F}=0$. (4) 存在函数U, 使得$dU=\vec{F}\cdot\vec{dl}$.所以，当且仅当$\vec{F}$满足上述条件之一时，$\vec{F}$就是一个**梯度场**，而且$\vec{F}$就是它的位函数U的梯度场,即$\vec{F}=\mathrm{grad}\,U$,就是说，$\vec{F}$是由它的位函数U来确定的.反之,U可由公式(2.11—1)或(2.11—2)求得.

因此，梯度场$\vec{F}$又称**有位场**（或**有势场**或**保守场**）.

在物理学中，例如对静电场$\vec{E}$,由公式(3.2)知$\vec{E}=-\nabla V$,这表明$\vec{E}$是有位场，反映了在静电场中,每一点有一个电位V,同时又相应有一个电场强度$\vec{E}$。而且由V可求得$\vec{E}$，由$\vec{E}$也可求得V，即

$$V(M)-V(M_0)=-\int_{M_0}^{M}\vec{E}\cdot\vec{dl}.$$

例6 设在点M_0 (x_0, y_0, z_0) 处有一质量为m的质点，而在其它点M (x,y,z) 处都是质量为1的质点.试证在整个空间引向点M_0所形成的中心力场$\vec{F}(M)$ 是一有位场.

解 令$r=|M_0M|=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2}$.由牛顿定律知，$M_0$到$M$的引力$\vec{F}(M)$,大小为$k\frac{m}{r^2}$（其中$k$为引力常数).方向为$M$到$M_0$。因为矢量的方向余弦为$\frac{x_0-x}{r}$，$\frac{y_0-y}{r}$，$\frac{z_0-z}{r}$；则$\vec{F}(M)$ 在坐标轴的投影为

$$F_x=k\frac{m(x_0-x)}{r^3},$$

$$F_y=k\frac{m(y_0-y)}{r^3},$$

$$F_z=k\frac{m(z_0-z)}{r^3}.$$

令 $U(x,y,z)=k\frac{m}{r}$,

计算得 $\frac{\partial U}{\partial x}=F_x$, $\frac{\partial U}{\partial y}=F_y$, $\frac{\partial U}{\partial z}=F_z$.

所以 $U=k\frac{m}{r}$为$\vec{F}(M)$的位函数，从而得

$$\vec{\mathbf{F}}(M)=\nabla U=km\nabla\frac{1}{r}$$

$$=km\frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2}}.$$

例7 下列矢量场是否为有位场，若为有位场求出其位函数：

(1) $\vec{F}=\{yz,\ zx,\ xy\}$;

(2) $\vec{F}=\left\{\frac{1}{2}z^2+y^2,\ 3x+zy,\ 2xy+5\right\}$.

解 (1) 因为 $F_x=yz$, $F_y=zx$, $F_z=xy$;

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=x-x=0,$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0;$$

即 $\nabla\times\vec{F}=0$.

所以，$\vec{F}$是有位场；它的位函数，由 (2.11—1)，得

$$U(x,\ y,\ z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$$=\int_0^x 0\cdot z\,dx+\int_0^y x\cdot 0\,dy+\int_0^z x\cdot y\,dz$$

$$=xyz.$$

从而，$\vec{F}=\nabla U=\nabla(xyz)=\text{grad}(xyz)$。即$\vec{F}$是它的位函数$U=xyz$（或$U=xyz+c$）的梯度场。

（2）因为 $F_x=\frac{1}{2}z^2+y^2$，$F_y=3x+zy$，

$$F_z=2xy+5;$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=2x-y,$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=z-2y,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=3-2y;$$

$$\nabla\times\vec{F}=\{2x-y,\ z-2y,\ 3-2y\};$$

易知，除点$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ 3\right)$外，场中其余各点，

$$\nabla\times\vec{F}\neq 0;$$

所以，$\vec{F}$不是有位场。当然，就不存在位函数。由此可见，不是任何矢量场都是有位场。

§2 矢量场的散度

散度是矢量场的一种空间变化率，是描述矢量场每一点源的性质的数量，是一种场微分。

2.1 散度概念 对于矢量场，在第二章中，我们应用矢通量这种场积分来描述场中某一区域内的源的性质；但这并不能表述整个场中源的分布，每一点源的变化特性。因而，引进散度的概念。

定义 设给定矢量场$\vec{F}(M)$及场中一点M,在M点周围作一个包围M点在内的任一闭曲面Σ,而Σ所围区域Ω的体积为ΔV;若极限

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}}{\Delta V}$$

(其中$\Delta V\to 0$,表示Ω以任意方式收缩向点M)存在,则该极限值称为矢量场$\vec{F}(M)$在M点的散度,记作$\operatorname{div}\vec{F}(M)$。

散度的定义表述了矢量场$\vec{F}$的矢通量$\Phi_0=\oiint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}$对于场中点$M$的空间变化率(也称为$\Phi_0$在$M$点的(体)密度),是描述矢量场中在给定点处源的强弱的一个数量。所以,散度$\operatorname{div}\vec{F}(M)$又可看作空间点的数量函数,是由矢量场$\vec{F}$产生的,而又描述该矢量场源的变化特性的数量场,此时,$\operatorname{div}\vec{F}$称为$\vec{F}$的散度场。

这样,矢量场$\vec{F}$的散度的绝对值$\left|\operatorname{div}\vec{F}(M)\right|$的大小,就可以用来衡量矢量场在$M$点的源的强弱。

当$\operatorname{div}\vec{F}(M)>0$时,表示矢线($\vec{F}$线或通量)从$M$点发射(或散发)出去(如图3—6, a),M点称为源点(正源或源泉)。

当$\operatorname{div}\vec{F}(M)<0$时,表示矢线(或通量)从场(或$M$点)周围发射(或散发),而在$M$点被接收(或吸收)(如图3—6,$b$),$M$点称为汇点(或负源)。

当$\operatorname{div}\vec{F}(M)=0$时,表示$M$点既不发射(散发)也不接收(吸收)矢线(或通量)(如图3—6,c),M点称为无源的。

若在矢量场$\vec{F}$中,每一点都有$\operatorname{div}\vec{F}\neq 0$,则$\vec{F}$称为有源

场；而每一点都有$\operatorname{div}\vec{F}=0$，则$\vec{F}$称为无源场。若在矢量场中，只在某一个区域内的每一点$\operatorname{div}\vec{F}\neq 0$，则该区域，称有源区域；而区域内每一点$\operatorname{div}\vec{F}=0$，则该区域称无源区域。

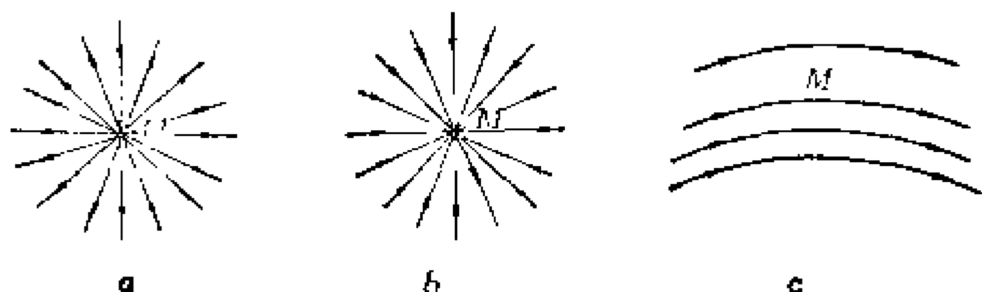


图3—6

如果$\vec{F}$是具有物理属性的，则散度场$\operatorname{div}\vec{F}$是具有物理意义的数量场，它表述场中每一点源的物理特性。

我们考察静电场$\vec{E}$。由第二章§2.2，因为电荷分布在空间中时，在M点的电荷体密度为

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}=\rho;$$

根据（2.7）知

$$\frac{\Delta q}{\varepsilon}=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{dS}$$

（其中Σ是围成体积为ΔV的闭曲面）。于是，

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{dS}}{\Delta V}=\frac{1}{\varepsilon}\rho;$$

由散度定义，

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

所以，静电场$\vec{E}$的散度场就是电荷密度场；而场$\vec{E}$中，每一点的散度值就是在该点的电荷体密度ρ的$\frac{1}{\varepsilon}$倍。因为ρ是表述电荷在空间中每一点的分布情况，所以，$|\mathrm{div}\vec{E}|$的大小就可以衡量电场中每一点带电的强弱。由于$\vec{E}$线从正电荷发出，终止于负电荷，从而，当$\mathrm{div}\vec{E}(M)>0$时，表示M点带有正电，而发射$\vec{E}$线，即M点为源点；当$\mathrm{div}\vec{E}(m)<0$时，表示M点带有负电，而接收从电场周围发射来的$\vec{E}$线，即M点为汇点；当$\mathrm{div}\vec{E}(M)=0$时，表示M点不带电，M点既不发射也不接收$\vec{E}$线，即M点是无源的。

对于静电场$\vec{E}$，因为$\mathrm{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$，$\rho\neq 0$，所以，静电场是有源场。这表述了静电场源的基本特性，同时，反映了$\vec{E}$这一矢量场，与电荷密度场ρ这一数量场之间的量变关系。如果在电场中，某一区域内$\rho=0$，则表明该区域是没有电荷的区域，即无源区域。

对于静磁场$\vec{H}$，因为$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{H}\cdot\vec{dS}=0$，由散度定义知$\mathrm{div}\vec{H}=0$；所以，$\vec{H}$是一个无源场。这是$\vec{H}$的源的基本特性；同时，说明静电场与静磁场在源方面的基本区别。

2.2 散度计算与性质 下面我们研究，散度在空间直角坐标系下的计算，及其性质。

定理3.2 设矢量场$\vec{F}=\{F_x,\ F_y,\ F_z\}$，$F_x$，$F_y$，$F_z$在场中任一点$M(x,\ y,\ z)$，有一阶连续编导数；则

$$\mathrm{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F} \tag{3.5}$$

其中$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$。

证明 根据散度定义，由定理2.1（即奥高公式）：

$$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}dV$$

其中Σ取外侧，则

$$\operatorname{div}\vec{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}dV$$

应用三重积分中值公式，在Ω上应有点$P(\xi,\ \eta,\ S)$存在，使得

$$\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}dV=\nabla\cdot\vec{F}(P)\Delta V.$$

当Ω缩向一点M时，即

$$\operatorname{div}\vec{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\nabla\cdot\vec{F}(p)\Delta V=\nabla\cdot\vec{F}(M),$$

定理证毕。

定理3.2说明，对于矢量场$\vec{F}$，必存在一个描述场中每一点源的变化特性的数量场——散度场；并且把求散度$\operatorname{div}\vec{F}$的计算，转化为求$\nabla\cdot\vec{F}$的微分运算，而由公式(3.5)求得。所以，散度是场的一种微分性质。

从定理3.2容易推得散度基本运算法则：

(1) $\operatorname{div}(c\vec{F})=c\operatorname{div}\vec{F}$,

$\nabla\cdot(c\vec{F})=c\nabla\cdot\vec{F}$;

(2) $\operatorname{div}(\vec{F}_1\pm\vec{F}_2)=\operatorname{div}\vec{F}_1\pm\operatorname{div}\vec{F}_2$,

$\nabla\cdot(\vec{F}_1\pm\vec{F}_2)=\nabla\cdot\vec{F}_1\pm\nabla\cdot\vec{F}_2$;

(3) $\operatorname{div}(f\vec{F})=f\operatorname{div}\vec{F}+\vec{F}\cdot\operatorname{grad}f$,

$\nabla\cdot(f\vec{F})=f\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla f$;

其中c为常数，$\vec{F}$，$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$为矢量场、f为数量场，具有连续偏

导数。

事实上，以(3)为例

$$\operatorname{div}(f\vec{F})=\nabla\cdot(f\vec{F})=\frac{\partial fF_x}{\partial x}+\frac{\partial fF_y}{\partial y}+\frac{\partial fF_z}{\partial z}$$

$$=\left(F_x\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)+\left(F_y\frac{\partial f}{\partial y}+f\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$$

$$+\left(F_z\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$$

$$=f\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$$

$$+\left(F_x\frac{\partial f}{\partial x}+F_y\frac{\partial f}{\partial y}+F_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$=f\,(\nabla\cdot\vec{F})+\vec{F}\cdot\nabla f$$

$$=f\operatorname{div}\vec{F}+\vec{F}\cdot\operatorname{grad}f$$

即为(3)，其余同样可证。作为练习，建议读者加以证明。

从定理3.1和定理3.2，可以推得下列重要的关系式：

(a) 设f是具有二阶连续偏导数的数量场，则f的梯度场的散度场：

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}f=\nabla^2 f, \tag{3.6}$$

其中 $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$。

事实上，$\operatorname{grad}f=\nabla f$，

$$\operatorname{div}(\nabla f)=\nabla\cdot(\nabla f)=\nabla^2 f.$$

(b) 设$\vec{F}=\{F_x, F_y, F_z\}$，$F_x$、$F_y$、$F_z$有二阶连续偏导数；则$\vec{F}$的散度场的梯度场：

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\,(\nabla\cdot\vec{F}), \tag{3.7}$$

其中 $\nabla(\nabla\cdot\vec{F})=\nabla\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$

$$=\left\{\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial z},\right.$$

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial y\partial z},$$

$$\left.\frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial y\partial z}++\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right\}.$$

事实上，$\mathrm{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}$，

$$\mathrm{grad}(\nabla\cdot\vec{F})=\nabla(\nabla\cdot\vec{F}).$$

例8 求下列矢量场的散度：

(1) $\vec{F}=\{x^2,\ -3xy,\ zx\}$

(2) $\vec{F}=\{-3x^2z,\ 6xyz,\ 7z\}$

解 (1) $\mathrm{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=2x-3x+x=0$.

所以，$\vec{F}$是无源场。

(2) $\mathrm{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=-6xz+6xz+7=7$.

从而，$\vec{F}$是有源场。

例9 求$\vec{F}=\{xy+z,\ yz+x,\ zx+y\}$的散度场，并讨论$\vec{F}$的源的性质。

解 $F_x=xy+z$，$F_y=yz+x$，$F_z=zx+y$；

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial F_y}{\partial y}=z,\quad \frac{\partial F_z}{\partial z}=x;$$

故，$\vec{F}$的散度场

$$\mathrm{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=y+z+x.$$

当 $\nabla\cdot\vec{F}=0$，即 $x+y+z=0$时，因为这是散度场$\mathrm{div}\,\vec{F}$的一个等量面，是过坐标原点的一个平面；所以，$\vec{F}$在这个平面上是无源的。

当$\nabla\cdot\vec{F}=c$（$c\neq0$的任意常数），即$x+y+z=c$时，同样，这也是散度场$\mathrm{div}\,\vec{F}$的等量面，是一族互相平行的平面，$\vec{F}$在这族平面上是有源的。显然，$c>0$的平面上每一点都是源点，$c<0$的平面上每一点是汇点。

有趣的是，由(3.7)，$\vec{F}$的散度场的梯度场

$$\mathrm{grad\ div}\,\vec{F}=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})=\nabla(x-y+z)=\{1,\ 1,\ 1\}$$

是一个常矢量。

例10 若$\mathrm{div}\,f(r)\vec{r}=0$，求$f(r)$，其中$\vec{r}=\{x,\ y,\ z\}$，$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

解 由(3.5)，$\mathrm{div}f(r)\vec{r}=\nabla\cdot(f(r)\vec{r})$。

令
$$\vec{F}=f(r)\vec{r}=\{f(r)x,\ f(r)y,\ f(r)z\},$$

$$F_x=f(r)x,\quad F_y=f(r)y,\quad F_z=f(r)z;$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(f(r)x)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}x+f(r)$$

$$=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}x+f(r)=f'(r)\frac{x^2}{r}+f(r);$$

同理计算，得

$$\frac{\partial F_y}{\partial y}=f'(r)\frac{y^2}{r}+f(r);$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z}=f'(r)\frac{z^2}{r}+f(r);$$

于是
$$\nabla\cdot(f(r)\vec{r})=3f(r)+rf'(r).$$

从 $\quad \mathrm{div} f(r)\vec{r}=0$，即

$$3f(r)+rf'(r)=0,$$

亦即 $\quad 3f(r)+r\dfrac{df(r)}{dr}=0$；

这是可分离变量微分方程，即，可化为

$$\frac{df(r)}{f(r)}=-3\frac{dr}{r},$$

积分得

$$\ln f(r)=-3\ln r+\ln c;$$

从而，求得$f(r)=\dfrac{c}{r^3}$。

所以，当$f(r)=\dfrac{c}{r^3}$时，$f(r)\vec{r}$是一个无源场。

例11 试证静电位 $V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$满足方程：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

解 由例4，因为

$$\vec{E}=-\nabla V=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r},$$

所以 $\quad \nabla^2 V=\nabla\cdot(\nabla V)=-\nabla\cdot\vec{E}$

$$=-\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)\right]$$

$$= -\frac{q}{4\pi e}\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right]=0.$$

由(3.6)即得

$$\frac{\partial^2 V}{2x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

证毕。

2.3 散度场与场积分关系 从定理3.2知，$\mathrm{div}\,\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}$ 于是，第二章的定理2.1（奥高公式）就表述了矢量场$\vec{F}$在区域Ω内的源容量$\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\,\vec{F}\,dV$ 等于$\vec{F}$穿出Ω的边界曲面Σ外侧的矢通量$\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}$。定理2.3的等价条件则表述了矢量场$\vec{F}$为无源场，即$\mathrm{div}\,\vec{F}=0$的各种充要条件：(1) 矢通量$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=0$，(2) 曲面积分$\iint_{\Sigma'}\vec{F}\cdot\vec{dS}$与$\Sigma'$（开曲面）的形状无关，只与$\Sigma'$的边界曲线$l$及其方向有关（$l$与$\Sigma'$正向联系）。所以，当且仅当$\vec{F}$满足上述条件之一时，$\vec{F}$就是无源场。

无源场还有一个特殊的性质。我们用矢量管（即$\vec{F}$线所围的管形曲面）来描绘它的形象，如图3—7为矢量管的一段，则有如下命题：

命题1 若$\vec{F}$为无源场，则$\vec{F}$通过矢量管的任意横断面（同一方向）的矢通量都相等。

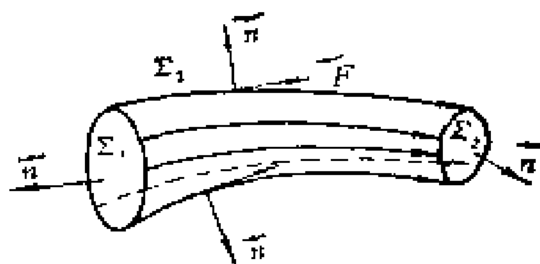


图3—7

证明 设Σ_1、Σ_2为所取矢量管的任二横断面，Σ_3为所截取的这段矢量管的侧面（如图3—7）。于是，矢量管曲面Σ，是

由Σ_1，Σ_2，Σ_3所组成的一个闭曲面。由于$\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=0$，则由定理2.3，对于$\Sigma$外侧，有

$$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=0,$$

即
$$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iint_{\Sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{dS}+\iint_{\Sigma_2}\vec{F}\cdot\vec{dS}+\iint_{\Sigma_3}\vec{F}\cdot\vec{dS}=0.$$

因为$\vec{F}$的方向是$\vec{F}$线的切线方向，所以，$\vec{F}$垂直于Σ_3的法线方向$\vec{n}$，从而有$\iint_{\Sigma_3}\vec{F}\cdot\vec{dS}=0$。

于是

$$\iint_{\Sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{dS}=-\iint_{\Sigma_2}\vec{F}\cdot\vec{dS},$$

因为$\vec{F}$线从Σ_1穿进Σ内，再穿出Σ_2；所以，如使Σ_1的法线方向与Σ_2的法线方向一致，则得

$$\iint_{\Sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iint_{\Sigma_2}\vec{F}\cdot\vec{dS},$$

证毕。易知反命题亦成立。

由此，人们又把无源场$\vec{F}$称**管量场**（或**管形场**）。

在实际问题中，有时要用到如下命题。

命题2 设$\vec{F}$为矢量场，若在场中某些点（或区域）上$\operatorname{div}\vec{F}\neq 0$或$\operatorname{div}\vec{F}$不存在，而在其它点上都有$\operatorname{div}\vec{F}=0$，则$\vec{F}$穿出包围这些点（或区域）的任一闭曲面的矢通量均相等。

证明 设$\operatorname{div}\vec{F}\neq 0$或$\operatorname{div}\vec{F}$不存在的点用闭曲面$\Sigma_1$包围起来，再作一与$\Sigma_1$不相交的曲面$\Sigma_2$且$\Sigma_2$在$\Sigma_1$的外侧，因此由$\Sigma_1\Sigma_2$所介的区域$\Omega$内$\operatorname{div}\vec{F}=0$，由（2.9—4)即得

$$\oiint_{\Sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\oiint_{\Sigma_2}\vec{F}\cdot\vec{dS}$$

命题证毕．

例如，$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}$ 在坐标原点没定义．因为包含原点的任一球面Σ，有$\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{dS}=\frac{q}{\varepsilon}$，若$\Sigma$为任一闭曲面，由命题2知

$$\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{dS}=\frac{q}{\varepsilon}.$$

2.4　格林第一、第二公式　根据梯度和散度运算性质，可以将奥高公式：

$$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}\,dV$$

的形式，在适当的条件下加以转化。

为此，设$f=f(x,\ y,\ z)$，$g=g(x,\ y,\ z)$是数量场，f，g在闭曲面Σ及其所围的区域Ω上有一阶连续偏导数，而在Ω上有二阶连续偏导数；$\vec{n}$为Σ外法线单位矢量．于是，由梯度性质1，有

$$\frac{\partial g}{\partial n}=\nabla g\cdot\vec{n},$$

故　$$f\frac{\partial g}{\partial n}=f\nabla g\cdot\vec{n};$$

令　$$\vec{F}=f\nabla g,$$

从而　$$\vec{F}\cdot\vec{dS}=f\nabla g\cdot\vec{n}\,dS=f\frac{\partial g}{\partial n}dS.$$

又由散度运算法则(3)，得

$$\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(f\nabla g)=f\nabla\cdot(\nabla g)+\nabla g\cdot\nabla f$$
$$=f\nabla^2 g+\nabla g\cdot\nabla f.$$

所以，奥高公式化为

$$\oiint_\Sigma f\frac{\partial g}{\partial n}ds=\iiint_\Omega(f\nabla^2 g+\nabla g\cdot\nabla f)dV. \tag{3.8}$$

(3.8) 称为**格林第一公式**。

在公式(3.8)中，把f与g的位置交换一下，又有

$$\oiint_\Sigma g\frac{\partial f}{\partial n}ds=\iiint_\Omega(g\nabla^2 f+\nabla g\cdot\nabla f)dV, \tag{3.8—1}$$

(3.8)－(3.8—1)得

$$\oiint_\Sigma\left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)ds=\iiint_\Omega(f\nabla^2 g-g\nabla^2 f)dV. \tag{3.9}$$

(3.9) 称为**格林第二公式**。

奥高公式这两种转化形式，表述了数量场f，g的场微分与积分的关系。将为实际应用提供方便，而且可以从Ω的边界曲面Σ上的场的性质求得Ω内的场的性质。

例12 设$f=f(x,y,z)$是满足$\nabla^2 f=0$的数量场，$\vec{n}$为Σ外法线单位矢量；如果在Σ上，$\frac{\partial f}{\partial n}=0$；试证，由$\Sigma$所围的区域$\Omega$内，$f=c$（$c$为常数）。

证明 在公式(3.8)中，取$f=g$，则

$$\nabla^2 f=\nabla^2 g=0$$

于是
$$\oiint_\Sigma f\frac{\partial f}{\partial n}dS=\iiint_\Omega(f\nabla^2 f+\nabla f\cdot\nabla f)\,dV$$
$$=\iiint_\Omega(\nabla f)^2 dV=0$$

从而，在Ω内必有 $\nabla f=0$,

即 $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0。$$

故得 $f=c$。

§3 矢量场的旋度

旋度是矢量场的一种最大空间变化率，是描述矢量场每一点旋性质的矢量，是矢量场的一种微分性质。

3.1 旋度概念 对于矢量场，只从源方面去研究，还不足以表述其内在性质。虽然在第二章中，我们应用旋转量这种场积分，来描述场中某一闭曲线上旋的性质，但这并不能表述场中每一点旋的变化特性。

为研究旋度，首先引进旋转量的方向导数概念，及其计数方法。

设给定矢量场 $\vec{F}(M)$和场中一点M，过M任作一单位矢量$\vec{n}$，并作以$\vec{n}$为法方向，l为边界的曲面$\sum'$，其面积为ΔS，闭曲线l与$\sum'$正向联系。当曲面$\sum'$（或ΔS）以任意的方式缩向定点M，即$\Delta S\to 0$，且$\sum'$在M点处的法方向$\vec{n}$保持不变时，若极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \vec{F}\cdot\vec{dl}}{\Delta S} \qquad (3.10—1)$$

存在，则该极限值称为矢量场$\vec{F}$在M点处沿给定方向$\vec{n}$的**旋转量对(曲面)面积的方向变化率(导数)**(或称旋转量面密度)，

记作 $$\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}$$

在空间直角坐标系下，设$\vec{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$，F_x,F_y,F_z在场中任一点$M(x,y,z)$有一阶连续偏导数，过M点的矢量$\vec{n}$的方向余

弦为$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}$有如下计算公式：

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\cos\beta$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

即 $$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}=\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}^0\quad(\vec{n}^0\text{为}\vec{n}\text{的单位矢量})\tag{3.10—2}$$

事实上，根据$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}$的定义(3.10—1)式，由斯托克司公式，把线积分化为面积分，参考重积分中值公式，即可推得

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\iint_{\Sigma'}\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}^0dS=\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}^0.$$

由此可见，$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}$的计算，就化为求偏导数，它的值决定于给定的点$M$和过此点的方向$\vec{n}$。

例13 设$\vec{F}=\{x^2+y,3yz-x^2,zx\}$，过$M\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$的矢量为$\vec{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，求$\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}\right)_M$的值。

解 因为$F_x=x^2+y$，$F_y=3yz-x^2$，$F_z=zx$；

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=-3y,\quad\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=-z,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=-2x-1;$$ 而$\vec{n}$的方向余弦

$$\cos\alpha=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}};$$

由公式(3.10)得

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}=\frac{-3}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-(2x+1)\frac{1}{\sqrt{3}},$$

从而，$\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}\right)_M=2-\sqrt{3}$

矢量场$\vec{F}$的旋转量Ψ_0的方向导数$\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}$，仅仅表明，场在给定点和过该点的某一方向，旋的变化率。但过场中每一点，都可以引任意多个方向；而且取其中任一方向（相应地就可以作出以所取方向为法方向，以某一闭曲线为边界的曲面），Ψ_0一般都有一个方向变化率。因此，$\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}$并不足以表述场中，每一点的旋的变化特性。于是，我们引进旋度的概念。

定义 设给定矢量场$\vec{F}$及场中一点M，若过M点有一个矢量$\vec{C}$，使得$\vec{F}$在M点沿$\vec{C}$方向的旋转量对面积的方向变化率最大；同时，规定$\vec{C}$的模，等于这个最大值；则矢量$\vec{C}$，称为矢量场$\vec{F}$在M点的最大空间变化率，简称旋度；记作

$$\vec{C}=\text{rot}\,\vec{F}(M);\qquad (\text{或记作}\quad \vec{C}=\text{curl}\,\vec{F}(M))$$

旋度的定义表述了矢量场$\vec{F}$在M点处旋转量对有向面积的最大方向变化率和取得这个最大值的方向。旋度也称为$\vec{F}$在M点的旋转量面密度矢量。因而旋度描述了矢量场中在给定点处旋的特性。所以，旋度$\text{rot}\,\vec{F}(M)$又可看作空间点的矢量函数。它是由矢量场$\vec{F}$产生的而又描述该矢量场旋的变化特性的矢量场。此时，$\text{rot}\,\vec{F}(M)$又称为$\vec{F}$的旋度场。若在矢量场$\vec{F}$中，每一点都有$\text{rot}\,\vec{F}\neq 0$，则$\vec{F}$称有旋场；而每一点都有$\text{rot}\,\vec{F}=0$，则$\vec{F}$称为无旋场。若在矢量场$\vec{F}$中，且只在场中某一区域内，每

一点$\mathrm{rot}\,\vec{F}\neq 0$，则该区域称为有旋区域；而区域内每一点$\mathrm{rot}\,\vec{F}=0$，则该区域称无旋区域。

如果$\vec{F}$是具有物理属性的，则旋度场$\mathrm{rot}\,\vec{F}$是具有物理意义的矢量场，它表述场中每一点旋的物理特性。

我们考察静磁场$\vec{H}$，在第二章§2.4中，定义了电流密度矢量$\vec{\delta}$：方向为电流流动的方向，模$|\vec{\delta}|=\delta$，即$\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta I}{\Delta S}=\delta$。由公式(2.8)知

$\Delta I=\oint_l \vec{H}\cdot\vec{dl}$，其中$\Delta S$是取以过$M$点的法矢量$\vec{n}$为法方向，以$l$为边界曲线的曲面$\Sigma'$的面积(如图3—8)，$\Delta I$为流过$\Sigma'$的电流量。当电流流动方向，即$\vec{\delta}$方向与$\vec{n}$的夹角$\theta$，$\Delta S$充分小时，则$\Delta I$可近似地表示为$\Delta I\approx\delta\cos\theta\Delta S$。于是

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \vec{H}\cdot\vec{dl}}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta S}=\delta\cos\theta;$$

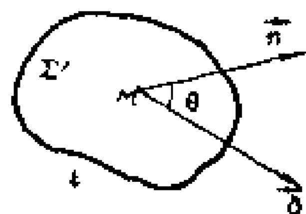


图3—8

即$\vec{H}$的旋转量Ψ_H在M点的方向变化率

$$\frac{\partial\Psi_H}{\partial S}=\delta\cos\theta;$$

而当$\theta=0$，即$\vec{\delta}$与$\vec{n}$方向相同时，$\cos\theta=1$，则$\dfrac{\partial\Psi_H}{\partial S}$取得最大值为$\delta$，取得这个最大值的方向就是$\vec{\delta}$的方向。由旋度定义，故

$$\vec{\delta}=\mathrm{rot}\,\vec{H},$$

即静电场$\vec{H}$在M点的旋度，就是电流(面)密度矢量；从而表述了产生静磁场的电流，在曲面上每一点的分布情况；同时，也反映了场中每一点旋的物理特性。所以，对于静磁场($\vec{\delta}\neq 0$)是一个有旋场。这是$\vec{H}$的旋的基本特性。

对于静电场$\vec{E}$，因为$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$，由旋度定义，故$\text{rot}\vec{E}=0$；

即静电场是一个无旋场。这是$\vec{E}$在旋方面的基本特性。

这样，静电场$\vec{E}$与静磁场$\vec{H}$，不仅在源方面有基本区别，而且在旋方面也有基本区别；反映了这两个物理场的不同的物理属性。

3.2 旋度计算与性质 下面我们研究，旋度在空间直角坐标系下的计算，及其性质。

定理 3.3 设矢量场$\vec{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$，F_x,F_y,F_z在场中任一点$M(x,y,z)$，具有一阶连续偏导数；则

$$\text{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F},\qquad(3.11)$$

其中 $$\nabla\times\vec{F}=\left\{\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right\}.$$

证明 Σ'为以取过M点的矢量$\vec{n}$为法方向，以闭曲线l为边界的曲面（如图3—9）；令$\vec{C}=\nabla\times\vec{F}$，$\vec{n}^0$为$\vec{n}$方向上的单位矢量，则由公式(3.10—2)得

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}=\vec{C}\cdot\vec{n}^0=|\vec{C}|\cos\theta,$$

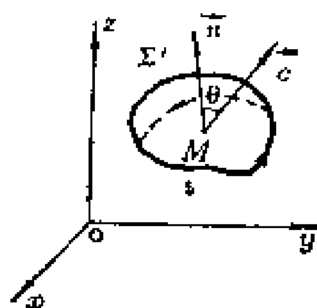


图3—9

其中θ为$\vec{n}$与$\vec{C}$的夹角。当$\theta=0$时，$\cos\theta=1$；从而，$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}$取得最大值$|\vec{C}|$，且取得这个最大值的方向，就是$\vec{C}$的方向；由旋度定义，故

$$\text{rot}\vec{F}=\vec{C}$$

定理证毕。

定理3.3说明，对于矢量场$\vec{F}$，存在一个描述场中的每一

点旋的变化特性的矢量场——旋度场；而且把求旋度rot $\vec{F}$ 的计算，化为求 $\nabla\times\vec{F}$ 的微分运算，并由公式(3.11)求得。所以，**旋度**是矢量场的一种微分性质。

从定理3.3，容易推得旋度的**基本运算法则**：

(1) $\operatorname{rot}(C\vec{F})=C\operatorname{rot}\vec{F}$，

$\nabla\times(C\vec{F})=C\nabla\times\vec{F}$；

(2) $\operatorname{rot}(\vec{F}_1\pm\vec{F}_2)=\operatorname{rot}\vec{F}_1\pm\operatorname{rot}\vec{F}_2$，

$\nabla\times(\vec{F}_1\pm\vec{F}_2)=\nabla\times\vec{F}_1\pm\nabla\times\vec{F}_2$；

(3) $\operatorname{rot}(f\vec{F})=f\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grot}f\times\vec{F}$，

$\nabla\times(f\vec{F})=f\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F}$；

(4) $\operatorname{div}(\vec{F}_1\times\vec{F}_2)=\vec{F}_2\cdot\operatorname{rot}\vec{F}_1-\vec{F}_1\cdot\operatorname{rot}\vec{F}_2$，

$\nabla\cdot(\vec{F}_1\times\vec{F}_2)=\vec{F}_2\cdot\nabla\times\vec{F}_1-\vec{F}_1\cdot\nabla\times\vec{F}_2$。

其中 C 为常数，f 为数量场，$\vec{F},\vec{F}_1,\vec{F}_2$ 为矢量场，具有连续偏导数。

事实上，以(3)为例。

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(f\vec{F})&=\nabla\times(f\vec{F})\\&=\{\operatorname{rot}_x(f\vec{F}),\operatorname{rot}_y(f\vec{F}),\operatorname{rot}_z(f\vec{F})\}\\&=\left\{\frac{\partial fF_z}{\partial y}-\frac{\partial fF_y}{\partial z},\frac{\partial fF_x}{\partial z}-\frac{\partial fF_z}{\partial x},\frac{\partial fF_y}{\partial x}-\frac{\partial fF_x}{\partial y}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_x(f\vec{F})&=\frac{\partial fF_z}{\partial y}-\frac{\partial fF_y}{\partial z}\\&=f\frac{\partial F_z}{\partial y}+F_z\frac{\partial f}{\partial y}-\left(f\frac{\partial F_y}{\partial z}+F_y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\&=f\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}F_z-\frac{\partial f}{\partial z}F_y\right)\\&=f\operatorname{rot}_x\vec{F}+(\operatorname{grod}f\times\vec{F})_x.\end{aligned}$$

同样可算得

$$\mathrm{rot}_y(f\vec{F})=f\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}F_x-\frac{\partial f}{\partial x}F_z\right)$$

$$=f\,\mathrm{rot}_y\vec{F}+(\mathrm{grod}\,f\times\vec{F})_y,$$

$$\mathrm{rot}_z(f\vec{F})=f\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}F_y-\frac{\partial f}{\partial y}F_x\right)$$

$$=f\,\mathrm{rot}_z\vec{F}+(\mathrm{grod}\,f\times\vec{F})_z.$$

从而即可得(3)。其余作为练习，建议读者加以证明。

旋度有如下重要性质：

性质　矢量场$\vec{F}$的旋度$\mathrm{rot}\,\vec{F}$在过M点的任一方向$\vec{n}$上的投影，等于旋转量Ψ_0对面积的方向变化率，即

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}=(\mathrm{rot}\,\vec{F})_{\vec{n}}=\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n^0}. \tag{3.12}$$

其中$\vec{n^0}$为$\vec{n}$方向上的单位矢量。

事实上，由定理3.3　$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$，又因为

$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}=\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n^0}$，所以

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_{\vec{n}}=(\nabla\times\vec{F})_{\vec{n}}=\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n^0}=\frac{\partial\Psi_0}{\partial S},$$即为(3.12)。

从(3.12)式知，当$\vec{n}$取$\mathrm{rot}\,\vec{F}$的反方向时，则$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}$取得最小值，即$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}=-|\mathrm{rot}\,\vec{F}|$。当$\vec{n}$取垂直于$\mathrm{rot}\,\vec{F}$的方向时，

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial S}=0.$$

例14　求$\vec{F}=\{x^2+y,\ 3yz-x^2,\ zx\}$的旋度场，及在

$M\left(1, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$的旋度和$\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}$的最大值、最小值。

解 山公式(3.11)和例12的计算得$\vec{F}$的旋度场 $\text{rot}\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\{-3y, -z, -2x-1\}$；而在$M$点的旋度$\text{rot}\,\vec{F}(M)\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -3\}$；由旋度定义，$\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}$在$M$点的最大值，即为$\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}\right)_M=|\overrightarrow{\text{rot}}\,F(M)|=\sqrt{15}$；由旋度性质，$\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}$在$M$点的最小值，即为$\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial S}\right)_M=-\sqrt{15}$。显然，$\vec{F}$除点$\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$外，都是有旋的。

例15 设某种质点M(如刚体质点)，以等角速度$\vec{\omega}=\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$绕$OZ$轴作旋转运动，则其形成的切线速度场$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$(参看第二章例9)，求$\vec{V}$的旋度。

解 $\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\{V_x, V_y, V_z\}$

$$=\{\omega_y z-\omega_z y, \ \omega_z x-\omega_x z, \ \omega_x y-\omega_y x\},$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}=2\omega_x,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}=2\omega_y,$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}=2\omega_z;$$

于是，$\vec{V}$的旋度

$$\text{rot}\,\vec{V}=\nabla\times\vec{V}=\{2\omega_x, \ 2\omega_y, \ 2\omega_z\}$$

$$=2\vec{\omega},$$

即$\vec{V}$的旋度是$\vec{\omega}$的二倍。正由于这种关系，所以在流体力学中，就用旋度的模是否为零判断在运动的流体内是否有漩涡存在，

同时也用旋度模的大小，量度旋转的快慢。但应注意，不一定非要有圆周运动或漩涡才有旋度。

3.3 旋度场与散度场、梯度场的关系

(1) 矢量场$\vec{F}$的旋度场，必为无源场，

即 $$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F}=0, \tag{3.13}$$

亦即 $$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0.$$

事实上，由公式 (3.5),(3.11) 得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F}&=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 F_z}{\partial y\partial x}\\&\quad+\frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 F_x}{\partial y\partial z}=0.\end{aligned}$$

(2) 数量场f的梯度场，必为无旋场，即

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}f=0, \tag{3.14}$$

亦即 $$\nabla\times\nabla f=0$$

事实上，由公式 (3.3),(3.11) 得

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{grad}f&=\nabla\times\nabla f\\&=\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\right.\\&\quad\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\}\\&=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z},\right.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big\} = 0.$$

(3) 矢量场 $\vec{F}$ 的旋度场的旋度场，有下列关系式

$$\text{rot rot}\,\vec{F} = \text{grad div}\vec{F} - \nabla^2 \vec{F}, \tag{3.15}$$

即
$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}.$$

事实上，由 (3.7) 知grad div$\vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F})$，而由(3.11)得

$$\text{rot rot}\vec{F} = \nabla \times \nabla \times \vec{F} = \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right), \cdots, \cdots\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z}, \cdots, \cdots\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}, \cdots, \cdots\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 F_x, \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 F_y, \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 F_z\right\}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}.$$

从 (3.13)～(3.15) 公式的推导，应假定F_x，F_y，F_z，f具有二阶连续偏导数。

(4) 若某一矢量场$\vec{C}$是另一个矢量场$\vec{F}$的旋度场，即$\vec{C} = \text{rot}\,\vec{F}$，则任意选择div$\vec{F}$的值，都不影响矢量场$\vec{C}$的值。

事实上，$\mathrm{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$，令$\vec{C}=\{C_x, C_y, C_z\}$，由$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$，得 $C_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}$，$C_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}$，$C_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$；显然，$\nabla\cdot\vec{F}$与$C_x$，$C_y$，$C_z$无关，这就是说，不管$\vec{F}$是有源场，还是无源场，或$\mathrm{div}\,\vec{F}$（即$\nabla\cdot\vec{F}$）选择任何值，都不影响$\vec{F}$的旋的性质。所以，矢量场$\vec{F}$的散度（源）与旋度（旋）具有独立性，而不能互相取代。因而，对于矢量场，必须同时研究它的源和旋的性质，才能准确地反映场的变化特性。

上述四种关系，表述了场的空间变化率所形成的场与场之间的内在联系.在研究场和有关场的计算时，常常要应用这些关系，简化场的研究和计算。

例16 设$\vec{F}=\left\{\frac{1}{3}x^3,\ -2zy,\ x^2-z\right\}$，求 $\mathrm{div}\vec{F}$、$\mathrm{rot}\,\vec{F}$，$\mathrm{graddiv}\,\vec{F}$，$\nabla^2\vec{F}$；验证$\mathrm{div\ rot}\vec{F}=0$，$\mathrm{rot\ grad\ div}\vec{F}=0$。

解 $F_x=\frac{1}{3}x^3$，$F_y=-2zy$，$F_z=x^2-z$；

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=x^2,\quad \frac{\partial F_y}{\partial y}=-2z,\quad \frac{\partial F_z}{\partial z}=-1;$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=2y,$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=-2x,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0.$$

于是，$\mathrm{div}\,\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=x^2-2z-1$，显然，$\vec{F}$在$x^2-2z-1=0$时

抛物柱面上是无源的，而在 $x^2-2z-1=C$ $(C\neq 0)$ 的抛物柱面上是有源的。

$$\mathrm{rot}\ \vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\{2y,\ -2x,\ 0\};$$

$$\begin{aligned}\mathrm{grad\ div}\ \vec{F}&=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})=\nabla(x^2-2z-1)\\&=\{2x,\ 0,\ -2\};\end{aligned}$$

因为 $\begin{aligned}\mathrm{rot\ rot}\vec{F}&=\nabla\times\nabla\times\vec{F}=\nabla\times\{2y,\ -2x,\ -1\}\\&=\{0,\ 0,\ -4\},\end{aligned}$

由 (3.15) 得

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{F}&=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla\times\nabla\times\vec{F}\\&=\{2x,\ 0,\ -2\}-\{0,\ 0,\ -4\}\\&=\{2x,\ 0,\ 2\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div\ rot}\ \vec{F}&=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\\&=\nabla\cdot\{2y,\ -2x,\ 0\}\\&=\frac{\partial}{\partial x}(2y)+\frac{\partial}{\partial y}(-2x)\\&=0\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot\ grad\ div}\ \vec{F}&=\nabla\times\nabla(\nabla\cdot\vec{F})\\&=\nabla\times\{2x,\ 0,\ -2\}\\&=0\end{aligned}$$

3.4 旋度场与场积分关系 从定理3.3知，矢量场 $\vec{F}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\ \vec{F}=\nabla\times\vec{F}$。这样，第二章中的定理2.2（斯托克司公式）就表述了矢量场 $\vec{F}$ 的旋度矢量 $\mathrm{rot}\ \vec{F}$ 穿过曲面 Σ' 正侧的矢通量 $\iint\limits_{\Sigma'}\mathrm{rot}\ \vec{F}\cdot\vec{ds}$ 等于 $\vec{F}$ 沿 Σ' 的边界曲线 l（l 于 Σ' 保持正向联系）正向的旋转量 $\oint\limits_{l}\vec{F}\cdot\vec{dl}$。定理2.4 的等价条件，表述了

矢量场$\vec{F}$为无旋场，即rot $\vec{F}=0$的各种充要条件：(1) 旋转量$\oint_l \vec{F}\cdot\vec{dl}=0$，(2) 线积分$\int_{M_0}^{M}\vec{F}\cdot\vec{dl}$与积分路线$\overset{\frown}{M_0M}$无关，只与路线的起点、终点有关。(3) $\vec{F}$为有位场（参见§1.3）。所以，当且仅当矢量场$\vec{F}$满足上述条件之一时，$\vec{F}$就是一个无旋场，即rot $\vec{F}=0$。

特别，从上述可知，有如下命题：

命题1 无旋场与梯度场（即有位场）是等价的矢量场。

下面叙述和证明，关于无源场（即管量场）与旋度场关系的一个命题。

命题2 一矢量场$\vec{F}$为无源场的充要条件是：存在另一矢量场$\vec{G}$，使得$\vec{F}=\text{rot}\,\vec{G}$。

证明 充分性：设$\vec{F}=\text{rot}\,\vec{G}$，由(3.13)得出

$$\text{div}\,\vec{F}=\text{div rot}\vec{G}=0,$$

故 $\vec{F}$是一无源场。

必要性：设div $\vec{F}=0$，即

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=0.$$

令

$$\begin{cases} G_x=\int_{z_0}^{z}F_y(x,y,z)\,dz-\int_{y_0}^{y}F_z(x,y,z_0)dy, \\ G_y=-\int_{z_0}^{z}F_x(x,y,z)dz, \\ G_z=C(\text{任一常数}). \end{cases}$$

由微分法容易求得

$$\frac{\partial G_z}{\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial z}=F_x,$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial x}=F_y,$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial y}=F_z.$$

由 $\mathrm{rot}\,\vec{G}=\nabla\times\vec{G}$，故存在$\vec{G}$，使得$\vec{F}=\mathrm{rot}\,\vec{G}$。命题证毕。

应该指出：有些书上把满足条件$\vec{F}=\mathrm{rot}\,\vec{G}$的矢量$\vec{G}$，称为矢量场$\vec{F}$的矢位（或矢势）或矢位函数。

3.5 调和场与调和函数 从§3.3的关系式(4)知，任一矢量场$\vec{F}$本身的散度$\mathrm{div}\,\vec{F}$与旋度$\mathrm{rot}\,\vec{F}$，是没有必然联系的。于是，引进如下概念。

定义 若一个矢量场$\vec{F}$，既是无源场（即$\mathrm{div}\,\vec{F}=0$），又是无旋场（即$\mathrm{rot}\,\vec{F}=0$），则$\vec{F}$称为调和场。

所以，调和场是一个既无源又无旋的矢量场。

如果$\vec{F}$是一个调和场，则由于$\mathrm{rot}\,\vec{F}=0$，从而$\vec{F}$是一个有位场，设其位函数为$U=U(x,y,z)$，于是，$\vec{F}=\mathrm{grad}\,U$。又由于$\mathrm{div}\,\vec{F}=0$，则有$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}U=0$，从公式（3.6）即得

$$\nabla^2U=0 \tag{3.16}$$

即
$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=0.$$

所以，调和场的位函数必满足方程（3.16），这是一个二阶线性偏微分方程，称为拉普拉斯方程（又称调和方程）。因此

定义 凡满足方程$\nabla^2U=0$的函数$U(x,y,z)$，称为调和函数。

例如在原点的点电荷q所产生的静电场$\vec{E}$，除去点电荷所在的原点外，由于$\mathrm{div}\,\vec{E}=0$，$\mathrm{rot}\,\vec{E}=0$。所以，$\vec{E}$(除原点外)是一个调和场。因为$\vec{E}=-\mathrm{grad}V$(V为电位)，从而V是一调和函数。

特别，如果$\vec{F}$是一平面场：$\vec{F}=\vec{F}(x,y)=\{F_x,F_y\}$，当$\vec{F}$为调和场时，由于$\text{rot}\,\vec{F}=0$，即$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0$，则存在位函数$U=U(x,y)$，使得$\vec{F}=\text{grad}U$，即有

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial U}{\partial y} \tag{3.17}$$

且U可由下式求出

$$U(x,y)-U(x_0,y_0)=\int_{x_0}^{x}F_x(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}F_y(x,y)dy \tag{3.18}$$

（参见公式(2.11—1)）。

又由于$\text{div}\,\vec{F}=0$，即$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}=0$。令$G_x=-F_y$，$G_y=F_x$，则对于$\vec{G}=\{G_x,G_y\}$，因为有

$$\frac{\partial G_y}{\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial y}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}=0$$

故$\text{rot}\,\vec{G}=0$。于是，又存在位函数$V=V(x,y)$，使得$\vec{G}=\text{grad}V$，即

$$-F_y=\frac{\partial V}{\partial x},\quad F_x=\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{3.19}$$

比较（3.17）与（3.19）式，可得

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x} \tag{3.20}$$

从（3.20）的两个方程消去U或V（假定U，V有二阶连续偏导数），可引出方程

$$\nabla^2U=0,\quad \nabla^2V=0.$$

所以，U，V都是满足二维拉普拉斯方程的调和函数，称为二

元调和函数。

定义 满足条件（3.20）的调和函数$U(x, y)$及$V(x,y)$称为共轭调和函数。

值得注意的是，复变函数论中的函数 $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$，此处i为虚数单位，为某区域内解析函数的充要条件是：f在该区域内可微且处处满足CR（柯西—黎曼）条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

易知，解析函数f的实部$u(x, y)$及虚部$v(x, y)$是共轭调和函数。因此，条件（3.20）就相当于上述的CR条件。解析函数与调和函数的这种联系，对于求解二维调和方程是有用的。

例17 验证$\vec{F}=\{-6xy,\ 3y^2-3x^2\}$为调和场，并求共轭调和函数。

解 $F_x=-6xy$，$F_y=3y^2-3x^2$，则

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}=-6y+6y=0,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=-6x-(-6x)=0,$$

故 $\nabla\cdot\vec{F}=0$，$\nabla\times\vec{F}=0$；

从而$\vec{F}$是一调和场。$\vec{F}$的位函数U，由（3.18）有

$$U=\int_0^y(3y^2-3x^2)dy=y^3-3x^2y,$$

即 $U=y^3-3x^2y$为所求的调和函数，而它的共轭调和函数V，由（3.20）、（3.18）得出

$$V=\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y(-6xy)dy$$
$$=x^3-3xy^2.$$

例18 设$\vec{F}=\{1+2x-5y,\ 4y-5x+7z,\ -6z+7y\}$，考察

$\vec{F}$ 是否为调和场.

解 $F_x = 1 + 2x - 5y$, $F_y = 4y - 5x + 7z$,
$F_z = -6z + 7y$;

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial F_y}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = -6;$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0;$$

故 $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, $\nabla \times \vec{F} = 0$;
所以, $\vec{F}$ 是一个调和场. 而 $\vec{F}$ 的位函数 (即调和函数)

$$U = \int_0^x (1 + 2x)dx + \int_0^y (4y - 5x)dy + \int_0^z (-6z + 7y)dz$$
$$= x + x^2 + 2y^2 - 5xy - 3z^2 + 7yz.$$

容易计算得 $\nabla^2 U = 0$.

例19 设 $U = xy$ 是一调和函数, 求它的共轭调和函数V.

解 由 (3.20) 得出

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -x.$$

由 (3.18) 可推知

$$V = \int_0^x -x dx + \int_0^y y dy = \frac{1}{2}(y^2 - x^2),$$

即为所求. 而所有的共轭调和函数

$$V = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + C.$$

§4 场的确定性、各种关系表

前面研究了数量场的梯度，矢量场的散度、旋度，用它们来描述场的变化特性。本节，研究场的确定性问题，并且把场的积分、微分及其间的关系和场的分类列成表。

4.1 场的确定性 从本章§1—§3知，在相当普遍的条件下，数量场存在梯度，矢量场存在散度和旋度。那么梯度、散度和旋度可否唯一确定产生它们的场呢？这就是场的**确定性**问题。有如下定理：

定理1 数量场f由梯度场grad$f$和f在某一定点M_0的值$f(M_0)$所唯一确定。

证明 设f_1，f_2为两个数量场，且有

$$\text{grad} f_1=\text{grad} f_2,\quad f_1(M_0)=f_2(M_0)。$$

令 $$f=f_1-f_2,$$

则 $$f(M_0)=f_1(M_0)-f_2(M_0)=0,$$

$$\text{grad} f=\text{grad} f_1-\text{grad} f_2=0,$$

故有 $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0。$$

由微分中值公式2（参见第一章§3.3）

$$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$$
$$=f_1(x_0,y_0,z_0)-f_2(x_0,y_0,z_0)=0$$

其中(x,y,z)为任一点M的坐标，(x_0,y_0,z_0)为M_0点坐标。于是有$f(M)\equiv 0$。定理证毕。

定理2 矢量场$\vec{F}$由散度场div $\vec{F}$、旋度场rot $\vec{F}$和边值条件所唯一确定。

证明 设$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$为两个矢量场，且有

$$\text{rot}\,\vec{F_1}=\text{rot}\,\vec{F_2},\quad \text{div}\,\vec{F_1}=\text{div}\vec{F_2},$$

而在围成区域Ω的闭曲面Σ的法方向$\vec{n}$上的投影相等，即$(\vec{F_1})_{\vec{n}}=(\vec{F_2})_{\vec{n}}$（这是边值条件）。

令 $$\vec{F}=\vec{F_1}-\vec{F_2},$$

则 $$\text{rot}\,\vec{F}=\text{rot}\,\vec{F_1}-\text{rot}\,\vec{F_2}=0,$$

$$\text{div}\,\vec{F}=\text{div}\vec{F_1}-\text{div}\vec{F_2}=0,$$

$$(\vec{F})_{\vec{n}}=(\vec{F_1})_{\vec{n}}-(\vec{F_2})_{\vec{n}}=0.$$

从而，$\vec{F}$是有位场，设位函数为U，即$\vec{F}=\text{grad}U$，

于是$\nabla^2U=0$，由于U在$\vec{n}$方向上的方向导数$\frac{\partial U}{\partial n}=(\text{grad}U)_{\vec{n}}$，

故$\frac{\partial U}{\partial n}=(\vec{F})_{\vec{n}}=0$。应用格林第一公式[即(3.8—1)式]，则有

$$\iiint\limits_{\Omega}(\text{grad}U)^2dV=0$$

从而有 $\vec{F}=\text{grad}U=0$。

定理证毕。

上述两个定理，表述了产生梯度场，散度场和旋度场的“母场”的唯一确定性。这正是表明它们在研究数学物理问题中重要性和基本作用。在第五章中，将看到英国著名物理学家麦克斯韦（Max Well）大胆而成功的工作所获得的柔美的结果。

4.2 场的各种关系表 下列各表中，Σ表示闭曲面，且取外侧，Ω为Σ所围的区域；l为闭曲线，Σ'，Σ''表示以l为边界的开曲面，且l与Σ'，Σ''正向联系。$\vec{F}(M)$、$f(M)$分别表示矢量场、数量场，且有连续偏导数。$U=U(M)$表示位函数，C为常数。$\int_{M_0}^{M}$表示线积分与积分路线无关，而只与路线的起

点 M_0、终点M有关。"$\iint\limits_{\Sigma'} = \iint\limits_{\Sigma''}$" 表示曲面积分与曲面的形状无关，而只与曲面的边界曲线及其方向有关；Σ'，Σ''是有相同边界 l 且保持正向联系的任意曲面。记号"$\Longleftrightarrow$"或"$\longleftrightarrow$"表示等价（或一致）。"$\longrightarrow$"表示由一个场产生或推得其它场。

表1　　　　积　分　关　系

$\oiint\limits_{\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{dS} = \iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\,dV$	（奥高公式）
$\oint\limits_{l} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \iint\limits_{\Sigma'} \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{dS}$	（斯托克司公式）

表2　　　　微　分　关　系

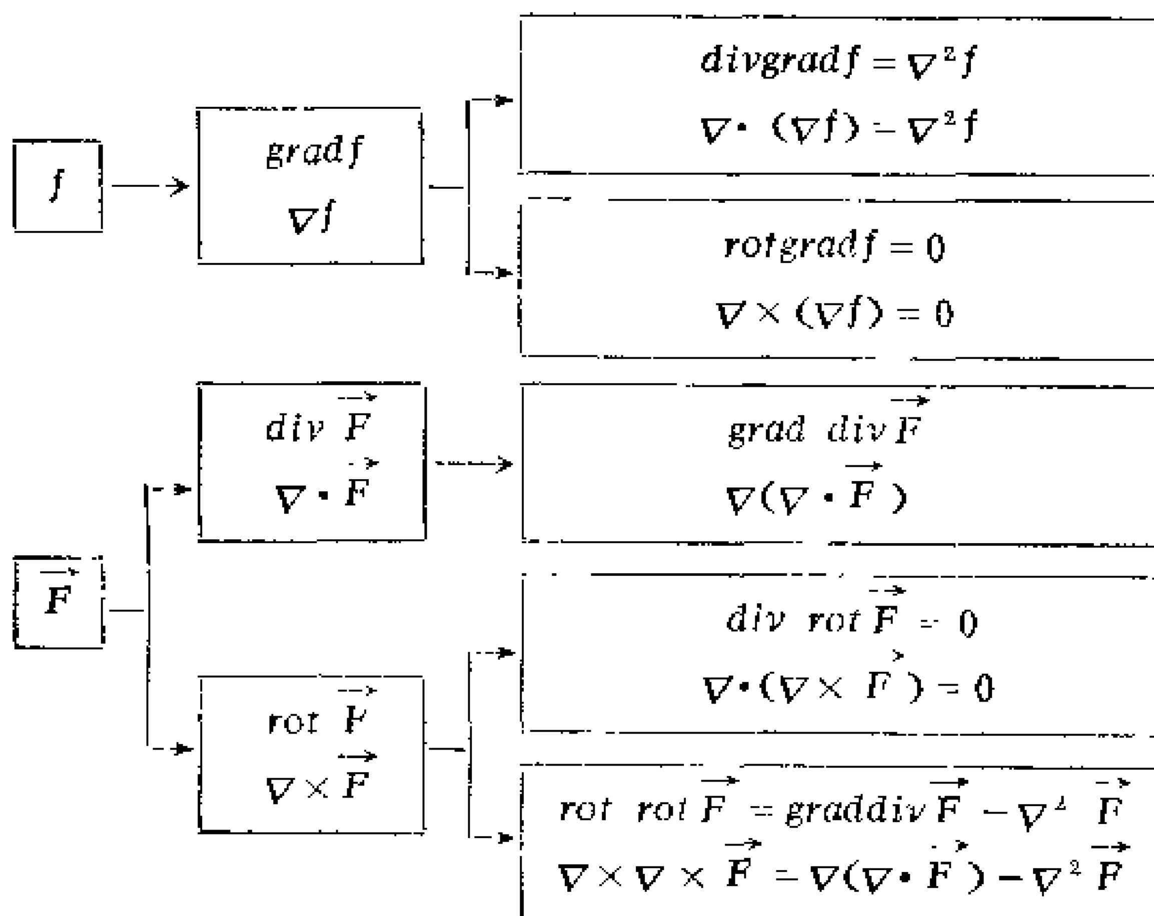


表3　　　　积 分 与 微 分 关 系

$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}=0\Longleftrightarrow\nabla\cdot\vec{F}=0\Longleftrightarrow\iint_{\Sigma'}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iint_{\Sigma''}\vec{F}\cdot\vec{dS}$
$\oint_{l}\vec{F}\cdot\vec{dl}=0\Longleftrightarrow\nabla\times\vec{F}=0\Longleftrightarrow\int_{M_0}^{M}\vec{F}\cdot\vec{dl}\Longleftrightarrow\vec{F}=\nabla(U+C)$

表4　　　　场 的 分 类

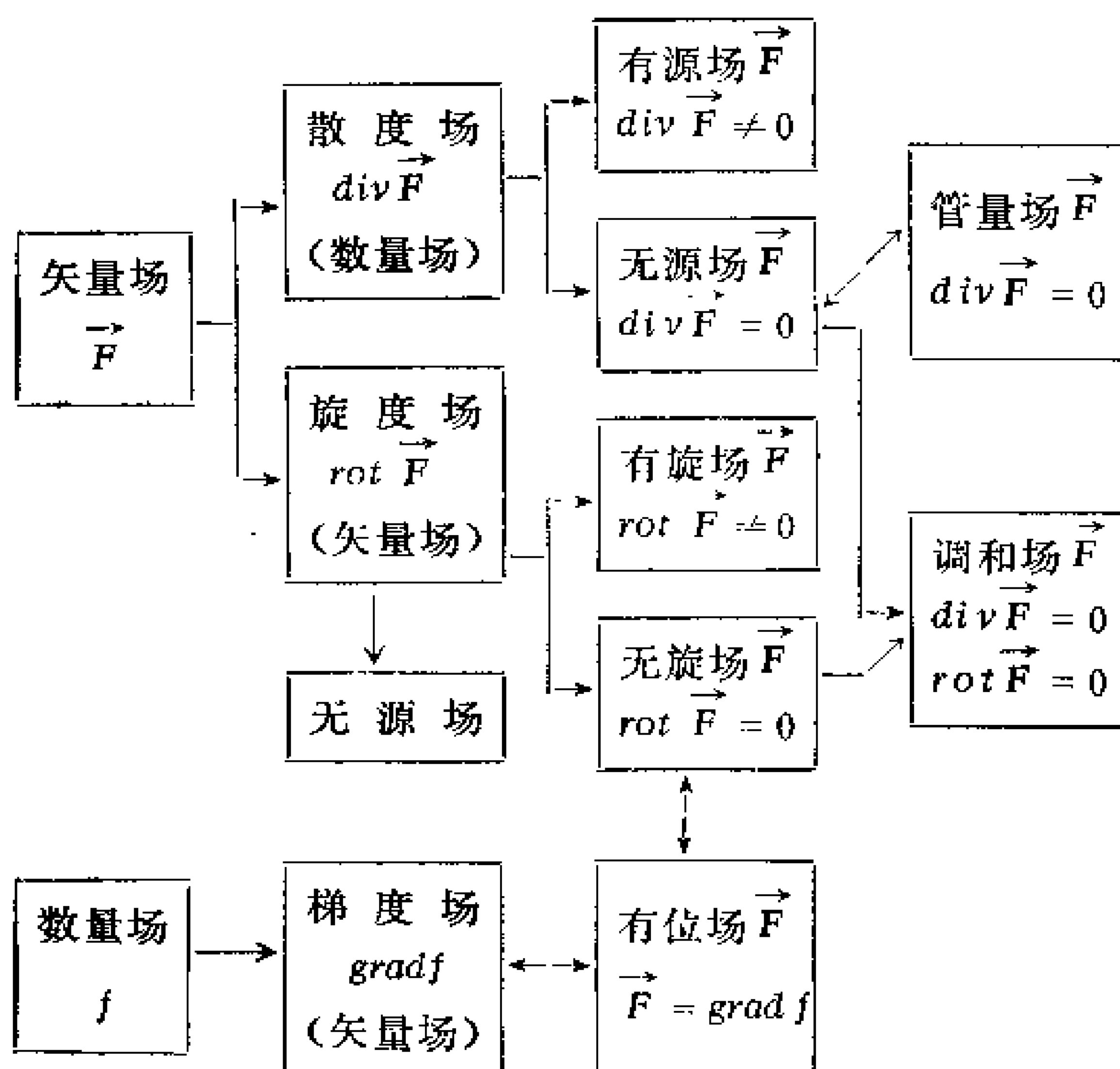


表5　　　　静　　电　　场

积　分　关　系	微　分　关　系
$\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{E}\,dV=\frac{q}{\varepsilon}$ $\oiint_{\Sigma}\vec{D}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{D}dV=q$	$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$ $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$
$\oint_{l}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ $\oint_{l}\vec{D}\cdot d\vec{l}=0$	$\nabla\times\vec{E}=0$ $\nabla\times\vec{D}=0$

表6　　　　静　　磁　　场

积　分　关　系	微　分　关　系
$\oiint_{\Sigma}\vec{H}\cdot d\vec{S}=0$ $\oiint_{\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	$\nabla\cdot\vec{H}=0$ $\nabla\cdot\vec{B}=0$
$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_{\Sigma'}\nabla\times\vec{H}\cdot dS=I$ $\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\iint_{\Sigma'}\nabla\times\vec{B}\cdot d\vec{S}=\mu I$	$\nabla\times\vec{H}=\vec{\delta}$ $\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{\delta}$

在表5和表6中，$\vec{E}$为电场强度，$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$为电位移矢量；$\vec{H}$为磁场强度，$\vec{B}=\mu\vec{H}$为磁感应强度矢量；$\rho$为电荷(体)密度，$\vec{\delta}$为电流（面）密度矢量；$q$为$\Sigma$及其所围的区域$\Omega$上的总电荷量，$I$为流过与$l$相链的载流导线回路或流过$\Sigma'$的总电流量；$\varepsilon$为电容率，$\mu$为磁导率。

第四章　正交曲线坐标系与场的计算

在前面几章中，我们定义的场及其积分、微分（空间变化率）等概念，都是与坐标系的选择无关的。它反映了这些概念客观性，给予人们选择适当坐标系的自由，便于进行更有效的计算。由于空间直角坐标系，是最基本、最常用的坐标系；所以，前面几章，我们集中地研究了场在这一坐标系下的表达式和计算方法，这当然也是十分重要的。是研究其它坐标系下场的计算基础。但在应用上，只使用直角坐标系，是不足的，有时会导致计算复杂化，因此，本章引进空间正交曲线坐标系，并研究在这种坐标系下，场的各种表达式和计算方法。这样，我们在应用上，就可以根据问题的条件，合理地选取坐标系，使计算简化。

§1　空间正交曲线坐标系

本节我们以直角坐标为基础，建立空间正交曲线坐标系，而且特别讨论，作为它的特例的柱面坐标系和球面坐标系。

1·1　正交曲线坐标系　设空间点M，其直角坐标为$(x、y、z)$；若存在一一对应的变换

$$\begin{cases} u = u(x,\ y,\ z), \\ v = v(x,\ y,\ z), \\ w = w(x,\ y,\ z). \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x = x(u,\ v,\ w), \\ y = y(u,\ v,\ w), \\ z = z(u,\ v,\ w), \end{cases}$$

则$(u,\ v,\ w)$称为M点的曲线坐标、三族曲面

$u=c_1$，$v=c_2$，$w=c_3$（其中c_1，c_2，c_3为常数）称为坐标曲面。这三族曲面两两相交，得曲线族

$$\begin{cases} v=c_2, \\ w=c_3, \end{cases}$$ 称为u曲线族；

$$\begin{cases} u=c_1, \\ w=c_3, \end{cases}$$ 称为v曲线族；

$$\begin{cases} u=c_1, \\ v=c_2, \end{cases}$$ 称为w曲线族；

称为坐标曲线族。显然，每一坐标曲线族中，对于u，v，w来说，都只有其中之一变化，而其余二个不变（例如，u曲线族中，v，w为常数，u变化）；由此可见，在每一条坐标曲线上，x,y,z只是u，v，w中一个变量的函数；而在每一坐标曲面上，x,y,z只是u，v，w中二个变量的函数（例如，在u曲线上，$x=x(u,c_2,c_3)$，x只是u的函数；而在曲面$u=c_1$上，$x=x(c_1,v,w)$，x只是v，w的函数）。

这样，空间中任一点都是三坐标曲面或三坐标曲线的交点，而使得曲线坐标（u，v，w）与空间点M一一对应。

如果三族坐标曲面（或曲线）互成正交，即，三族坐标曲面的交点的三个切平面（或三族坐标曲线的交点的三切线）两两互相垂直，则称（u，v，w）为空间点的正交曲线坐标。我们规定在该点的切线正向上的单位矢量$\vec{e}_u$，$\vec{e}_v$，$\vec{e}_w$称为正交曲线坐标的基本单位矢量（如图4—1）。

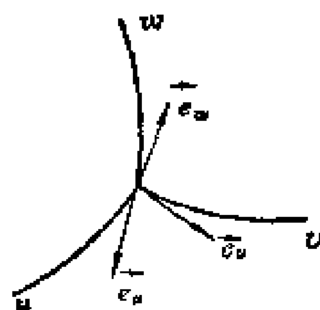


图4—1

于是在正交曲线坐标系下，空间点函数可以表示为

$$f=f(M)=f(u,\ v,\ w),$$
$$\vec{F}=\vec{F}(M)=\vec{F}(u,\ v,\ w)$$

$$= F_u\vec{e_u} + F_v\vec{e_v} + F_w\vec{e_w}$$

$$= \{F_u, F_v, F_w\},$$

其中F_u，F_v，F_w是u，v，w的数量函数，表示$\vec{F}$在$\vec{e_u}$，$\vec{e_v}$，$\vec{e_w}$方向上的投影（或称坐标）。

1·2 柱面坐标系 这是一种常用的正交曲线坐标系。设空间点M，其直角坐标为（x，y，z），在XOY平面的投影为P，令$OP=r$，OP与X轴正向夹角为θ。则（r，θ，z）称点M的柱面坐标（如图4—2），容易看出，M点的直角坐标与柱面坐标（除原点外）对应关系为

$$(1)\quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

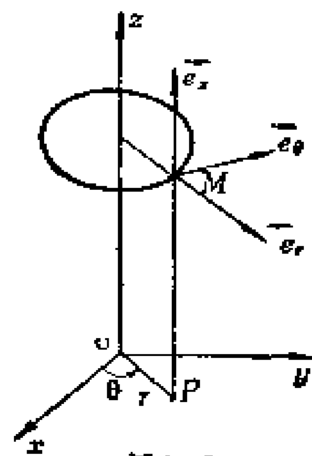


图4—2

即

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \text{arctg}\dfrac{y}{x}, \\ z = z, \end{cases}$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant +\infty$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$-\infty < z < +\infty$。三族坐标曲面为

$r = c_1$，即以Z轴为轴的圆柱面；

$\theta = c_2$，即过Z轴的半平面；

$z = c_3$，即与XOY平面平行的平面。三族坐标曲线为

$$\begin{cases} \theta = c_2, \\ z = c_3, \end{cases}$$

即起点在Z轴且与XOY平面平行的射线；

$$\begin{cases} r = c_1, \\ z = c_3, \end{cases}$$

即圆心在Z轴且与XOY平面平行的圆周；

$$\begin{cases} r = c_1, \\ \theta = c_2, \end{cases}$$

即与Z轴平行的直线．显然，三坐标曲线在空间任一点(除原点外）是正交的，其基本单位矢量，记作$\vec{e}_r$，$\vec{e}_\theta$，$\vec{e}_z$。于是，空间点函数可以表示为

$$f = f(M) = f(r, \ \theta, \ z),$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}(M) = \vec{F}(r, \ \theta, \ z) \\ &= F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z \\ &= \left\{F_r, \ F_\theta, \ F_z\right\}. \end{aligned}$$

因为空间任一点（除原点外）总是在某一圆柱面上，所以$(r, \ \theta, \ z)$又称圆柱坐标，简称**柱坐标**．

1．3　**球面坐标系**　这也是一种常用的正交曲线坐标系．设空间点M，其直角坐标为（x，y，z），令$|OM| = r$，r与Z轴正向夹角为θ，OM在XOY平面的投影OP与X轴正向的夹角为φ，则（r，θ，φ）称点M的**球面坐标**（如图4—3)。从P作X轴的垂线得交点A，因为P是M点的垂足，则$OA = x$，$AP = y$，$PM = z$。由直角三角形OAP知，$x = OP\cos\varphi$，$y = OP\sin\varphi$；又由直角三角形OPM知，$OP = r\sin\theta$，$Z = r\cos\theta$；于是，M点的直角坐标与球面坐标的对应关系为

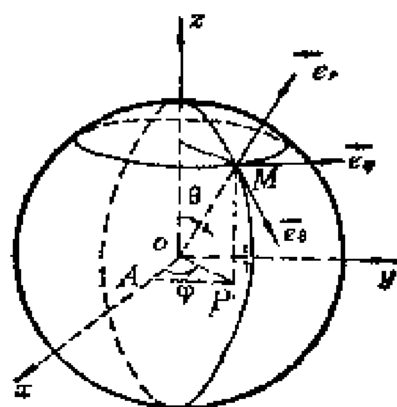


图4—3

$$(2) \quad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

即

$$
\begin{cases}
r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\
\theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\
\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x};
\end{cases}
$$

其中　$0 \leqslant r < +\infty$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$，　$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$。三族坐标曲面为

$r = c_1$，即以原点为心的球面；

$\theta = c_2$，即以原点为顶点，Z轴为轴的圆锥面；

$\varphi = c_3$，即过Z轴的半平面。

三族坐标曲线为

$$
\begin{cases}
\theta = c_2, \\
\varphi = c_3,
\end{cases}
$$

即以坐标原点为起点的射线；

$$
\begin{cases}
r = c_1, \\
\varphi = c_3,
\end{cases}
$$

即过M点的半圆弧；

$$
\begin{cases}
r = c_1, \\
\theta = c_2,
\end{cases}
$$

即圆心在Z 轴的圆周。显然，三坐标曲线，在空间任一点（除原点外）是正交的，其基本单位矢量，记作$\vec{e}_r$，$\vec{e}_\theta$，$\vec{e}_\varphi$。于是，空间点函数．可表示为

$$
\begin{aligned}
f &= f(M) = f(r, \theta, \varphi) \\
\vec{F} &= \vec{F}(M) = \vec{F}(r, \theta, \varphi) \\
&= F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_\varphi \vec{e}_\varphi \\
&= \{F_r, F_\theta, F_\varphi\}.
\end{aligned}
$$

因为空间任一点（除原点外）总是在某一球面上，所以人们把（r，θ，φ）称为球面坐标，简称**球坐标**。

应该指出的是，在球坐标 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 中，若θ取OM与OP间的夹角（如图4—4），此时，θ从$z=0$的平面算起，正半Z轴$\theta=\frac{\pi}{2}$，负半Z轴$\theta=-\frac{\pi}{2}$，从而$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$；而$M$点的直角坐标与球坐标的对应关系，易知为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi, \\ y=r\cos\theta\sin\varphi, \\ z=r\sin\theta, \end{cases}$$

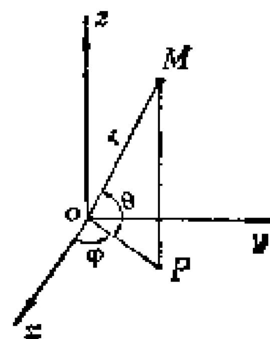


图4—4

其中$0\leqslant r<+\infty$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$。这种对应关系与前面一种对应关系的作用是相同的，本书使用前一种对应关系。

对于空间直角坐标，显然是正交曲线坐标最简单的特例，此时，$u=x$，$v=y$，$w=z$。

§2 场积分的表示

在第二章中，我们讨论了矢通量，旋转量以及通量容量这三种场积分及其在直角坐标系下的表达和计算。应用上，为了将直角坐标系下场积分变换为正交曲线坐标系下的表示式，除了直接使用两种坐标对应关系进行代换，把所给曲面方程、曲线方程、$\vec{F}$、f用正交曲线坐标表示外，关键的在于把曲面元素矢量$\overrightarrow{dS}$、曲线元素矢量$\overrightarrow{dl}$、体积元素dV表示为正交曲线坐标。但是这并不能从坐标对应关系式直接代换得到。本节就来研究这些元素的正交曲线坐标表示。

为此，设$\vec{r}$表示空间点M的位置的矢径（如图4—5），即

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\vec{r}(u,\ v,\ w)\\&=x(u,\ v,w)\vec{i}+y(u,\ v,\ w)\vec{j}\end{aligned}$$

$$+z(u,\ v,\ w)\vec{k},$$

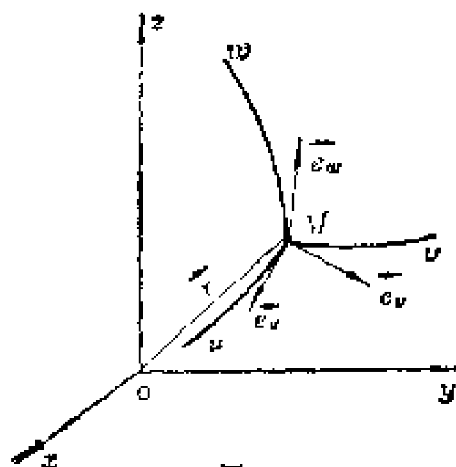


图4—5

设dl_u，dl_v，dl_w为过M点相应坐标曲线的曲线元素。因为，在u曲线上，只有u变化，所以此时

$$\vec{dr}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}\right)du,$$

故 $$dl_u=|\vec{dr}|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}du,$$

令 $$h_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2},\tag{4.1-1}$$

则 $$dl_u=hu_u u。\tag{4.1-2}$$

因为在v曲线上，只有v变化，同理可得

$$h_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2},\tag{4.2-1}$$

$$dl_v=h_v dv,\tag{4.2-2}$$

而在w曲线上，只有w变化，同样可得

$$h_w=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial W}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial W}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial W}\right)^2},\tag{4.3—1}$$

$$dl_w=h_w\,dw\ ;\tag{4.3—2}$$

我们把h_u，h_v，h_w称为对应坐标曲线上的度量系数。

由此可得，在正交曲线坐标系下，空间曲线l的曲线元素矢量

$$\vec{dl}=h_u du\,\vec{e_u}+h_v dv\,\vec{e_v}+h_w\,dw\,\vec{e_w}$$

$$=\{h_u\,du,\ h_v\,dv,\ h_w\,dw\},\tag{4.4}$$

从而，三坐标曲面元素为

$$dS_u = dl_v dl_w = h_v h_w \, dv dw,$$
$$dS_v = dl_u dl_w = h_u h_w \, du dw, \tag{4.5}$$
$$dS_w = dl_u dl_v = h_u h_v \, du dv;$$

于是，空间曲面Σ的曲面元素矢量为

$$\overrightarrow{dS} = ds_u \, \overrightarrow{e_u} + ds_v \, \overrightarrow{e_v} + ds_w \, \overrightarrow{e_w}$$
$$= \{ds_u, \ ds_v, \ ds_w\}, \tag{4.6}$$

而空间区域Ω的体积元素为

$$dV = dl_u dl_v dl_w$$
$$= h_u h_v h_w du dv dw. \tag{4.7}$$

由上所述，可以看出，在正交曲线坐标系下，$\overrightarrow{dl}$，$\overrightarrow{dS}$，dV的坐标表示，都多了相应坐标曲线上的度量系数，这是特别值得注意的。

现在，我们将上述所得的结果，应用于柱坐标系、球坐标系。

对于柱坐标系(r, θ, z)，根据对应关系(1)，因为

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

于是，从(4.1—1)、(4.2—1)、(4.3—1)算得度量系数为

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1. \tag{4.7}$$

而从(4.4)，(4.5)，(4.6)，(4.7)算得

$$\overrightarrow{dl} = \{dr, \ rd\theta, \ dz\},$$
$$\overrightarrow{dS} = \{rd\theta dz, \ drdz, \ rdrd\theta\}, \tag{4.8}$$
$$dV = rdrd\theta dz.$$

对于球坐标(r,θ,φ)，根据对应关系(2)，因为

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=-r\sin\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=0.$$

于是，从(4.1—1)，(4.2—1)，(4.3—1)算得度量系数为

$$h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_\varphi=r\sin\theta; \tag{4.9}$$

而从(4.4)，(4.5)，(4.6)，(4.7)得

$$\vec{dl}=\{dr,\ rd\theta,\ r\sin\theta d\varphi\},$$

$$\vec{dS}=\{r^2\sin\theta d\theta d\varphi, r\sin\theta drd\varphi, rdrd\theta\},$$

$$dV=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi. \tag{4.10}$$

这样，在正交曲线坐标系下，场积分可表示为

$$\oint_l \vec{F}\cdot\vec{dl}=\oint_l F_u h_u du+F_v h_v dv+F_w h_w dw;$$

$$\oiint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{dS}=\oiint_\Sigma F_u h_v h_w dvdw+F_v h_u h_w dudw+F_w h_u h_v dudv;$$

$$\iiint_\Omega f dv=\iiint_\Omega f h_u h_v h_w dudvdw.$$

§3 场的空间变化率表示

本节摘要地推导梯度、散度、旋度在正交曲线坐标系下的表示式。设数量场$f=f(u,v,w)$，矢量场$\vec{F}=\{F_u,F_v,F_w\}$，并假定f,F_u,F_v,F_w对于u,v,w,有连续偏导数。

3.1 梯度表示式

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}f &= \nabla f \\ &= \left\{\frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u},\ \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v},\ \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

事实上，设 $\vec{l}$ 为过 M 点的任一给定方向（如图4—6），由(4.1—2)，(4.2—2)，(4.3—2)知，$\overrightarrow{\Delta l}$在坐标曲线方向 $\vec{e}_u$，$\vec{e}_v$，$\vec{e}_w$ 上的投影，分别为

$$\Delta u = \frac{1}{h_u}\Delta l\cos\alpha,$$

$$\Delta v = \frac{1}{h_v}\Delta l\cos\beta,$$

$$\Delta w = \frac{1}{h_w}\Delta l\cos\gamma,$$

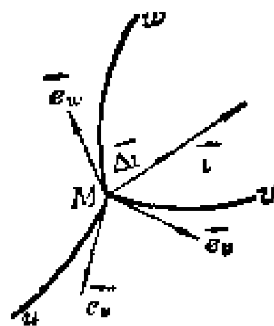


图 4—6

其中$\Delta l = |\overrightarrow{\Delta l}|$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为 $\vec{l}$ 的方向余弦，而$\alpha = (\vec{l}, \vec{e}_u)$，$\beta = (\vec{l}, \vec{e}_v)$，$\gamma = (\vec{l}, \vec{e}_w)$。因此，$f$在$M$点沿 $\vec{l}$ 的方向导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} &= \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{df+\eta}{\Delta l} \\ &= \lim_{\Delta l\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{h_u}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{h_v}\cos\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{1}{h_w}\cos\gamma + \frac{\eta}{\Delta l}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{h_u}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{h_v}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{1}{h_w}\cos\gamma \\ &= (\nabla f)\cdot\vec{l^\circ} = |\nabla f|\cos(\nabla f, \vec{l^\circ}), \end{aligned}$$

其中η为$\Delta l\to 0$时，比Δl较高阶的无穷小量，$\vec{l^\circ}$ 为 $\vec{l}$ 的单位矢量；

显然，当$(\nabla f, \vec{l^\circ})=0$时，$\cos(\nabla f, \vec{l^\circ})=1$，$\frac{\partial f}{\partial l}=|\nabla f|$为最大值；由梯度定义，即得(4.11)。

对于柱坐标(r,θ,z)，由(4.7)，(4.11)得

$$\text{gradf}=\nabla f=\left\{\frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right\}. \tag{4.12}$$

对于球坐标(r,θ,φ)，由(4.9)，(4.11)得

$$\text{gradf}=\nabla f=\left\{\frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right\}. \tag{4.13}$$

3.2 散度表示式

$$\text{div}\ \vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(F_u h_v h_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(F_v h_u h_w\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(F_w h_u h_v\right)\right] \tag{4.14}$$

事实上，根据散度定义，可取由u与$u+\Delta u$，v与$v+\Delta v$，w与$w+\Delta w$所确定的曲面，构成闭曲面Σ，于是Σ围成曲面平行六面体(如图4—7)，设其棱边曲线弧为Δl_u，Δl_v，Δl_w，于是，容易知道Σ所围的体积ΔV为

$$\Delta V=\iiint_\Omega h_u h_v h_w du dv dw$$

$$=\int_u^{u+\Delta u}\int_v^{v+\Delta v}\int_w^{w+\Delta w} h_u h_v h_w du dv dw$$

$$=[h_u h_v h_w]_{P_1}\Delta u\Delta v\Delta w.$$

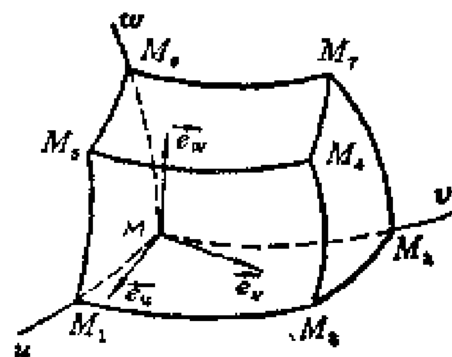


图4—7

其中Ω为Σ所围区域，$[\cdots]_{P_1}$是利用积分中值公式的结果，是Ω内某点P_1的值。

为了计算$\vec{F}$穿出Σ外侧的矢通量，可先分别计算$\vec{F}$穿过两两相对的平行曲面的矢通量。因为$\vec{F}$穿过$\Sigma_1(M_1M_5M_4M_6)$与

$\sum_2(MM_2M_7M_6)$两平行曲面的矢通量，不难表示为

$$\Phi_1 = \iint\limits_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{ds} + \iint\limits_{\Sigma_2} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

$$= \int_v^{v+\Delta v}\int_w^{w+\Delta w}\Big[F_u(u+\Delta u, v, w) - F_u(u, v, w)\Big]$$

$$\cdot h_v h_w dv dw$$

$$= \int_v^{v+\Delta v}\int_w^{w+\Delta w}\Big[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_u F_u)\Big]_{P_2} \Delta u dv dw$$

$$= \Big[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_w h_v)\Big]_{P_3} \Delta u \Delta v \Delta w,$$

其中$[\cdots]_{P_2}$是利用微分中值公式的结果，是取 Δu中 某点P_2的值；$[\cdots]_{P_3}$是利用积分中值公式的结果，是取Ω内某点P_3的值。同理可求得$\vec{F}$穿过其它两对平行曲面的矢通量

$$\Phi_2 = \Big[\frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w)\Big]_{P_4};$$

$$\Phi_3 = \Big[\frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)\Big]_{P_5};$$

故$\vec{F}$穿出Σ外侧的矢通量

$$\Phi_0 = \oiint\limits_{\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{dS} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3.$$

于是，在$\mathrm{div}\,\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Phi_0}{\Delta V}$中，当$\Delta u$，$\Delta v$，$\Delta w$，均趋向零时，容易推得(4.14)。

由(4.11)，(4.14)又可得到

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\Big]. \tag{4.15}$$

对于柱坐标(r,θ,z)，由(4.7)，(4.14)，(4.15)得

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{F}}=\nabla\cdot\vec{\mathbf{F}}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{4.16}$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}. \tag{4.17}$$

对于球坐标(r,θ,φ)，由(4.9)，(4.14)，(4.15)得

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{F}}=\nabla\cdot\vec{\mathbf{F}}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{4.18}$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}. \tag{4.19}$$

3.3 旋度表示式

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{F}}=\nabla\times\vec{\mathbf{F}}$$

$$=\Big\{\frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w)-\frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)\right],$$

$$\frac{1}{h_w h_u}\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u)-\frac{\partial}{\partial u}(F_w h_w)\right],$$

$$\frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_v h_v)-\frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\right]\Big\} \tag{4.20}$$

事实上，根据旋度定义与性质，取曲面Σ_2（如图4—7）其边界曲线l由$\overset{\frown}{MM_2}$ $\overset{\frown}{M_2M_7}$ $\overset{\frown}{M_7M_6}$ $\overset{\frown}{M_6M}$连成。于是$\vec{F}$沿l的旋

转量，不难表示为

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \oint_l \vec{F} \cdot \vec{dl} \\
&= -\int_v^{v+\Delta v}\Big[F_v(u, v+\Delta v, w+\Delta w) \\
&\quad - F_v(u, v+\Delta v, w)\Big] h_v dv \\
&\quad + \int_w^{w+\Delta w}\Big[F_w(u, v+\Delta v, w+\Delta w) \\
&\quad - F_w(u, v, w+\Delta w)\Big] h_w dw \\
&= -\int_v^{v+\Delta v}\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)\right]_{P_1} \Delta w dv \\
&\quad + \int_w^{w+\Delta w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w)\right]_{P_2} \Delta v dw \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)\right]_{P_3} \Delta w \Delta v \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w)\right]_{P_4} \Delta v \Delta w,
\end{aligned}
$$

其中$[\cdots]_{P_1}$，$[\cdots]_{P_2}$是应用微分中值公式的结果，分别是Δw、Δv中某点P_1，P_2的值；$[\cdots]_{P_3}$ $[\cdots]_{P_4}$是利用积分中值公式的结果，分别是Δv，Δw某点P_3，P_4的值。又因为$\sum_2$的面积，可表示为$\Delta S_u=[h_v h_w]_{P_5}\Delta v\Delta w$，其中$[\cdots]_{P_5}$是应用积分中值公式的结果。从而在

$$(\nabla\times\vec{F})_u=\lim_{\Delta S_u\to 0}\frac{\Phi}{\Delta S_u}$$

中，当Δv，Δw均趋向于零时，容易得到

$$(\nabla\times\vec{F})_u=\frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w)-\frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)\right].$$

同理可得

$$(\nabla\times\vec{F})_v=\frac{1}{h_w h_u}\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u)-\frac{\partial}{\partial u}(F_w h_w)\right],$$

$$(\nabla\times\vec{F})_w=\frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_v h_v)-\frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\right],$$

即得(4.20)。

对于柱坐标(r,θ,z)，由(4.7)，(4.20)得

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z},\ \frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r},\right.$$

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right\}. \tag{4.21}$$

由 $\nabla^2\vec{F}=-\nabla\times(\nabla\times\vec{F})-\nabla(\nabla\cdot\vec{F})$，又得

$$\nabla^2\vec{F}=\left\{\nabla^2F_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}-\frac{F_r}{r^2},\right.$$

$$\left.\nabla^2F_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{F_\theta}{r^2},\ \nabla^2F_z\right\} \tag{4.22}$$

对于球坐标(r,θ,φ)，由(4.9)，(4.20)得

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\varphi)\right.$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}$$

$$\left.-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi),\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right\}.$$

(4.23)

而且可得，

$$\nabla^2\vec{F}=\left\{\frac{1}{r}\nabla^2(rF_r),\ \nabla^2F_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right.$$

$$-\frac{F_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}, \quad \nabla^2 F_\varphi-\frac{F_\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\Big\} \qquad (4.24)$$

第五章　场论在电磁场理论中的应用

电磁场理论与近代科学的发展有着十分密切的关系。场论在电磁场的研究中，起着极其重要的基础性的作用。

电磁场理论，是直接研究电场强度$\vec{E}$，磁场强度$\vec{H}$及其在空间中的分布规律的。研究无线电波在介质中的传播，对无线电信系统进行总体设计时，在发射机的输出端与接收机的输入端之间，都必须通过求解场而获得电磁场分布。求电磁场的分布，就是求出场中每一点$\vec{E}$和$\vec{H}$。由于大多数电子工程中$\vec{E}$和$\vec{H}$都是未知的待求的量，知道的只是场中各导体的大小、表面形状、导体间的电位差，相互位置介质分布、初始状态等条件，因此，求解电场磁问题，研究$\vec{E}$和$\vec{H}$必须满足的量变规律，就显得十分重要了。

本章，根据场的物理性质，应用场的数学理论，引出电磁场的基本方程——麦克斯韦（Maxwell）方程；然后，从基本方程出发，推导电磁场主要表征量，所必须满足的微分方程。

§1　连续性方程与麦克斯韦方程

电场现象和磁场现象，并不是孤立地存在的，因为当电荷作变速相对运动时，它所产生的电场是变化的，从而又产生变化的磁场，而变化的磁场，又将产生新的电场；因此，变化的电场、磁场间是互相联系、互相制约，形成统一的电磁场。所以，把电磁场分为电场和磁场只有相对的意义。

从第三章中我们知道，对于静磁场有

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{\delta}\,; \tag{5.1}$$

因为任何旋度场都是无源场，故又有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{\delta} = 0. \tag{5.2}$$

但对于随时间变化的电磁场（简称时变场），(5.1)，(5.2) 仍然正确吗？历史上，提出和认识这个问题的过程中，麦克斯韦首先注意到电流的连续性问题，而且在解决这个问题的基础上，建立了系统完整的电磁场理论。

下面我们就来研究这个问题。

1.1 连续性方程 连续性方程是以常见的电流流动现象，即电荷守恒定律为基础的，就是说，电荷既不能创造也不能消失，只能从一处流到另一处。

设Σ为场中任一闭曲面，Ω 为Σ所围的区域，$\vec{\delta}$ 为电流（面）密度矢量；于是，在单位时间内，从Ω内流出Σ的总电流量为

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\delta} \cdot \vec{dS},$$

由奥高公式得

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\delta} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\delta}\, dV, \tag{5.3—1}$$

其中Σ取外侧。设Ω内的电荷（体）密度为$\rho = \rho(M,t)$，若在时间dt内改变一值$\frac{\partial \rho}{\partial t}dt$，则体积元素$dV$的电荷量 ρdV 就改变$\frac{\partial \rho}{\partial t}dt\,dV$，而整个区域$\Omega$的电荷量改变

$$dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

这一电荷量必须在时间dt内流进Ω；因为在Ω内的电荷，只有电流流过Σ时，才能离开Ω；所以，在单位时间内从Ω内向Σ

外侧流出的电荷量为

$$-\iiint_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV \tag{5.3—2}$$

于是，从（5.3—1）.（5.3—2）有

$$\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{\delta}\,dV=-\iiint_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV,$$

即

$$\iiint_{\Omega}\left(\nabla\cdot\vec{\delta}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV=0, \tag{5.4}$$

由(5.4）对于场中任一闭曲面Σ所围的区域Ω都成立，故

$$\nabla\cdot\vec{\delta}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{5.5}$$

这一等式称作电磁场的连续性方程。

1.2 麦克斯韦方程 从连续性方程（5.5）十分清楚地看到，对于时变场，(5.2)不再正确了！这显然是一个矛盾，因为任何旋度场都是无源场，而$\vec{\delta}$是一旋度场，但（5.5)说明$\vec{\delta}$不再是无源场了。为了解决这个矛盾，就必须考察在时变场的情况下，(5.1)应给予怎样的修正，才能既反映磁场的有旋性又反映$\nabla\times\vec{H}$的无源性.英国学者麦克斯韦作了勇敢而成功的设想；必须在（5.1)的右边加上某一个数学量，使得$\vec{\delta}$与此量之和的散度为零。

事实上，由第三章我们知道

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \tag{5.6}$$

这里$\vec{D}$，ρ是时间t和空间点M的函数，而且t与M是独立变量；于是，在（5.6)中两边对时间t求导数

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{D}=\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

从而有 $\nabla\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$. (5.7)

应用连续性方程于 (5.7)则得

$$\nabla\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{\delta}$$

再由第三章§2.2的散度运算法则(2)得

$$\nabla\cdot\left(\vec{\delta}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0. \tag{5.8}$$

这样一来，促使麦克斯韦假设，必须在(5.1) 右边加进一量 $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$，即

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{\delta}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \tag{I}$$

从而有

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})=\nabla\cdot\left(\vec{\delta}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0, \tag{5.9}$$

即 $\nabla\times\vec{H}$ 是一个无源场．因此，这一假设成功地解决了上述提出的矛盾，充分地反映了任何磁场 $\vec{H}$ 的有旋性与 $\nabla\times\vec{H}$ 的无源性；而且连续性方程(5.5) 仍然保持正确性.

从(I)看出，对于与时间无关的磁场，因为 $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$，则(I)就是(5.1)，但对于时变场，电流密度矢量不再是 $\vec{\delta}$ 了，而是 $\vec{\delta}_t=\vec{\delta}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$，并且从(5.9) 知 $\nabla\cdot\vec{\delta}_t=0$，即全电流永远是连续的.

麦克斯韦把量 $I_t=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 称为位移电流，并且指出，它在产生磁场方面与 $\vec{\delta}$ 相同。而假设位移电流存在，就是麦克斯韦首创的最根本的观点。

(I) 式表述了，任何磁场在旋方面的特性，时变磁场与电场之间的内在联系。(I)式称为麦克斯韦第一方程。

下面我们从讨论时变电场旋方面的性质，研究电场、磁场之间的关系。

从第三章知道，对于静电场有

$$\nabla\times\vec{E}=0, \tag{5.10}$$

但在时变场中，(5.10)仍然正确吗？根据法拉第实验定律，在变化磁场的情况下，$\vec{E}$ 沿场中任一闭曲线 l 的旋转量，等于穿过以 l 为边界的曲面 Σ' 的磁通量对时间的变化率的负值，即

$$\oint_l \vec{E}\cdot\vec{dl}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma'}\vec{B}\cdot\vec{dS}, \tag{5.11—1}$$

对于考虑场中给定的 l，$\vec{B}$ 随时间改变，于是(5.11—1)又可写作

$$\oint_l \vec{E}\cdot\vec{dl}=-\iint_{\Sigma'}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{dS}, \tag{5.11—2}$$

由斯托克司公式得

$$\oint_l \vec{E}\cdot\vec{dl}=\iint_{\Sigma'}\nabla\times\vec{E}\cdot\vec{dS},$$

从而

$$\iint_{\Sigma'}\nabla\times\vec{E}\cdot\vec{dS}=-\iint_{\Sigma'}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{dS},$$

由于上式对于场中任一曲面 Σ' 都成立，故

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad \text{(II)}$$

(II) 式说明，对于时变电场(5.10)不再正确了，但对于与时间无关的电场，因为$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$，则 (II) 就化为(5.10)。所以，(II) 表述了任何电场旋方面的特性，时变电场与磁场之间的内在联系。(II) 称为麦克斯韦第二方程。

(I)，(II) 普遍地表述了电场与磁场的基本关系，说明它们是相互影响的。若把表示电场磁场源的关系式 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$和 $\nabla\cdot\vec{B}=0$结合起来，就组成一个系统完整的、普遍适用的、说明电磁场性质的基本方程组

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{\delta}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \text{(I)}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{(II)}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho, \qquad \text{(III)}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0, \qquad \text{(IV)}$$

称为麦克斯韦方程组。对应的积分形式为

$$\oint_l\vec{H}\cdot\vec{dl}=\iint_{\Sigma'}\left(\vec{\delta}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dS}, \qquad \text{(I')}$$

$$\oint_l\vec{E}\cdot\vec{dl}=-\iint_{\Sigma'}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{dS}, \qquad \text{(II')}$$

$$\oiint_\Sigma\vec{D}\cdot\vec{dS}=\iiint_\Omega\rho dV, \qquad \text{(III')}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0. \tag{IV'}$$

在计算上，常用到下列物理关系

$$\vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E},$$

$$\vec{\delta} = \sigma \vec{E},$$

称为结构方程，它们是说明场所在地方介质特性的关系式。其中μ，ε，σ是磁导率，电容率、电导率。

§2　静态场方程

本节将推导静态场的表征量所必须满足的方程，即泊松方程与拉普拉斯方程。

2.1　电位方程　由麦克斯韦方程(III)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho,$$

或
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

由于静电场$\vec{E}$是一个有位场，即

$$\vec{E} = -\nabla V,$$

则
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5.12}$$

为V所满足的方程，称为泊松方程，是一个二阶偏微分方程，当$\rho = 0$时，则

$$\nabla^2 V = 0 \tag{5.13}$$

称为拉普拉斯方程；其中电位$V = V(M)$，电荷密度$\rho = \rho(M)$是空

间点的数量函数。

(5.13)在直角坐标系下表示为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

在柱坐标系下表示为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

在球坐标系下表示为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0.$$

(参见第四章(4.17),(4.19))。

这样，求解静电场问题，就化为在给定条件下，求解方程(5.12)或(5.13)的问题，解出V后，再由$\vec{E}=-\nabla V$，求得场中每一点的$\vec{E}$。

例1 设在直角坐标系下，有两个在X，Y轴方面为无限大的且平行于坐标平面XOY的平面，其间的距离为d，当$z=0$时，电位$V=V_0$，当$z=d$时，$V=V_1$，求该两平面间的区域内电场分布。

解 (如图5—1)。因为在没有电荷的区域内，V满足方程(5.13)。从对称关系，显然，V在X轴、Y轴方向没有变化，只在Z轴方向有变化，从而，方程(5.13)化为

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0;$$

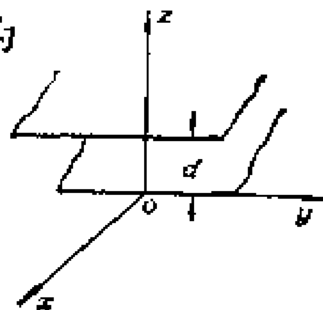


图5—1

对Z积分两次得通解

$$V=C_1 z+C_2,$$

其中C_1，C_2为任意常数．从$V|_{z=0}=V_0$得$C_2=V_0$；从$V|_{z=d}=V_1$得$C_1=\frac{V_1-V_0}{d}$；故

$$V=\frac{V_1-V_0}{d}z+V_0$$

为所求的电位．从$\vec{E}=-\nabla V$得

$$\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$=-\frac{V_1-V_0}{d}\vec{k},$$

为所求的电场强度，是一个常矢量，方向沿Z轴，指向低电位平面．

例2 设在柱坐标系下，有两个以Z轴为轴的同轴无限长圆柱$r=r_0$，$r=r_1$，两圆柱间加有一电位差，且$V|_{r=r_0}=V_0$，$V|_{r=r_1}=V_1$；又设V在θ，Z的方向没有变化，求该两圆柱间的环形区域内的电场分布．

解（如图5—2）．在没有电荷的区域内，V满足方程(5·13)，由问题的条件，在柱坐标系下，变为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)=0.$$

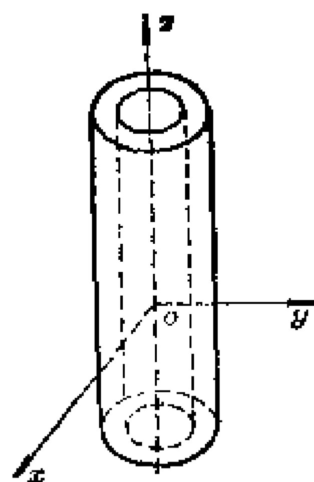


图5—2

容易验证，上述方程的解为

$$V=C_1\ln r+C_2,$$

其中C_1，C_2为任意常数，从$V|r=r_0=V_0$，有

$$V_0=C_1\ln r_0+C_2,$$

从$V|r=r_1=V_1$，有

$$V_1=C_1\ln r_1+C_2;$$

从而

$$C_1 = \frac{V_0 - V_1}{\ln r_0 - \ln r_1},$$

$$C_2 = V_0 - \frac{V_0 - V_1}{\ln r_0 - \ln r_1}\ln r_0;$$

于是

$$V = \frac{V_0 - V_1}{\ln r_0 - \ln r_1}(\ln r - 1) + V_0$$

为所求的电位。从$\vec{E} = -\nabla V$及（4.12）得

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r$$

$$= -\frac{V_0 - V_1}{\ln r_0 - \ln r_1}\frac{1}{r}\vec{e}_r,$$

为所求的电场强度，其方向沿r的方向指向低电位的圆柱。

例3 设在球坐标系下，有两个以原点为球心的同心球面：$r = r_0$，$r = r_1$，且此两球面加有一电位差，而 $V|_{r=r_0} = V_0$，$V|_{r=r_1} = V_1$，又设V在θ与φ方向上没有变化，求该两球面间的电场分布。

解（如图5—3）在没有电荷的区域内，V满足方程(5.13)，由所给条件，在球坐标系下变为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0;$$

容易验证，它的解为

$$V = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

从$V|_{r=r_0} = V_0$，有

$$V_0 = \frac{C_1}{r_0} + C_2;$$

从$V|_{r=r_1}=V_1$，有

$$V_1=\frac{C_1}{r_1}+C_2;$$

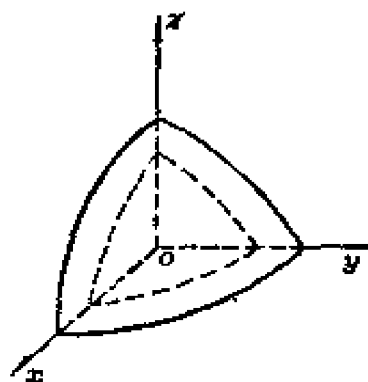


图5—3

从而得

$$C_1=\frac{r_0r_1(V_0-V_1)}{r_1-r_0},$$

$$C_2=V_0-\frac{r_1(V_0-V_1)}{r_1-r_0}.$$

于是

$$V=\frac{r_1(V_0-V_1)}{r_1-r_0}\left(\frac{r_0}{r}-1\right)+V_0$$

为所求的电场强度。

2.2　磁位方程　为了简化磁场的研究，求得磁场的分布，物理学家们用数学方法定义磁场的磁位——数量磁位与矢量磁位的概念。磁位是没有明确物理意义的量，而仅仅是数学上的计算量。

若空间点的数量函数V_N，使得

$$\vec{H}=-\nabla V_N \tag{5.14}$$

成立，则V_N称为磁场的数量磁位。

V_N 的定义有合理的方面，因为磁场$\vec{H}$是一个无源场，即 $\Delta\cdot\vec{H}=0$；于是从（5.14）得

$$\nabla^2V_N=0, \tag{5.15}$$

即V_N满足拉普拉斯方程。因此，V_N的定义表述了磁场的无源性。但V_N的定义有局限性，因为磁场与电流一般是不可分割的（除永久磁铁产生的磁场外），它总是一个有旋场，即

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{\delta},$$

而定义（5.14）是把$\vec{H}$看作有位场，即无旋场

$$\nabla \times \vec{H} = 0,$$

所以，V_N的定义没有反映磁场的有旋性，只局限于不存在宏观电流（$\vec{\delta} = 0$）的区域内有意义，在宏观电流存在（即$\vec{\delta} \neq 0$）的区域中将失去作用。尽管在很多实际工程中，人们往往把宏观电流，看作集中在占空间体积很小的导线中，这样，V_N也可以用来近似地描述磁场的分布；然而，这毕竟还是不足的。因而，下面引进矢量磁位的概念。

若空间点的矢量函数$\vec{A}$，使得

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{5.16}$$

成立（其中$\vec{B}$为磁感应强度矢量），则$\vec{A}$称为磁场的**矢量磁位**。

$\vec{A}$的定义是合理的，因为

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{5.16—1}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{B}$$

$$= \mu \vec{\delta}, \tag{5.16—2}$$

从而，$\vec{A}$充分反映了磁场的无源性与有旋性这两个基本特性。

现在推导$\vec{A}$满足的方程。因为由第三章§3.3关系（4），及(5.16)知，任意选择$\nabla \cdot \vec{A}$的值都与$\vec{B}$无关，我们可取$\nabla \cdot \vec{A} = 0$，于是，由(5.16—2)及(3.15)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F},$$

得

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{\delta}, \tag{5.17}$$

即为所求$\vec{A}$必须满足的方程，这是一个矢量形式的泊松方程。当$\vec{\delta}=0$时，则得

$$\nabla^2\vec{A}=0, \tag{5.18}$$

为矢量形式的拉普拉斯方程。

在正交曲线坐标系下，方程（5.17)(5.18）都相当于三个数量方程。

例如方程（5.18）在直角坐标系下表示为

$$\nabla^2 A_x=\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}=0,$$

$$\nabla^2 A_y=\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}=0,$$

$$\nabla^2 A_z=\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}=0, \tag{5.18—1}$$

在柱坐标系下，由（4.22）可表示为

$$\nabla^2 A_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}-\frac{A_r}{r^2}=0,$$

$$\nabla^2 A_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{A_\theta}{r^2}=0, \tag{5.18—2}$$

$$\nabla^2 A_z=0,$$

在球坐标系下，由（4.24）可表示为

$$\frac{1}{r}\nabla^2(rA_r)=0;$$

$$\nabla^2 A_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=0,$$

$$\nabla^2 A_\varphi-\frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}=0. \tag{5.18—3}$$

这样，求解静磁场问题，就化为在给定条件下，求解方程(5.15)或(5.17)(5.18)的问题，解出V_N或$\vec{A}$后，再由(5.14)或(5.16)求得$\vec{H}$或$\vec{B}$。

例4 设有一无限长圆柱形导线，通过电流为I，导线截面的半径为a，且电流在截面中均匀分布，求导线内磁场分布。

解 取导线与z轴重合，应用柱坐标，于是导线各点电流密度，沿Z轴方向，它的值为$\delta=\frac{I}{\pi a^2}$。因此，矢量磁位$\vec{A}=A_z\vec{e}_z$，必满足方程(5.17)，且简化为

$$\nabla^2 A_z=-\mu\delta$$

在柱坐标系下，由(4.17)可表示为

$$\nabla^2 A_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}=-\mu\delta$$

即
$$\frac{d^2 A_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dA_z}{dr}+\mu\delta=0。\tag{1}$$

为了求(1)的通解，令$r=e^u$ 则$\ln r=u$，$\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}$。从而，

$$\frac{dA_z}{dr}=\frac{dA_z}{du}\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dA_z}{du},$$

$$\frac{d^2A_z}{dr^2}=\frac{1}{r}\frac{d^2A_z}{du^2}\frac{du}{dr}-\frac{1}{r^2}\frac{dA_z}{du}$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{d^2A_z}{du^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dA_z}{du},$$

代入(1)化简得

$$\frac{d^2A_z}{du^2}+\mu\delta e^{2u}=0。\tag{2}$$

对u积分两次得

$$A_z+\frac{1}{4}\mu\delta e^{2u}=C_1u+C_2,$$

即有 $$A_z = C_1 \ln r + C_2 - \frac{1}{4}\mu\delta r^2 \quad (3)$$

为(1)的通解．因为导线内$C_1 = 0$，否则A_z变为无限大，选取$C_2 = 0$，则(3)化为

$$A_z = -\frac{1}{4}\mu\delta r^2,$$

故 $$\vec{A} = -\frac{1}{4}\mu\delta r^2 \vec{e_z}$$

为所求的矢量磁位。再由（5.16）及（4.21）得

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla\times\vec{A}\\ &= -\frac{\partial A_z}{\partial r}\vec{e_\theta}\\ &= \frac{1}{2}\mu\delta r\,\vec{e_\theta},\end{aligned}$$

即为所求。

§3 时变场方程

本节我们推导求解时变场分布时，场的表征量所必须满足的方程。

3.1 $\vec{E}$和$\vec{H}$的波动方程 在研究无线电波在介质中传播的问题时，首先要求出$\vec{E}$和$\vec{H}$所必须满足的方程，这里$\vec{E}$和$\vec{H}$都是时间t和空间点的矢量函数。

由麦克斯韦方程（I），（II）及结构方程得

$$\nabla\times\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad (I)$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad (II)$$

其中μ，ε，σ通常根据所研究的介质是已知的量，所以，我们可以假定它们在整个空间中为常数。为了求出$\vec{E}$和$\vec{H}$独立所满足的方程，在（II）中两边取旋度

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\mu\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},$$

由于旋度运算与t无关，则有

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H}).$$

由(I)，上式变为

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right),$$

即
$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

由（3.15），因为

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E},$$

故得
$$\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$

即
$$\nabla^2\vec{E}-\nabla(\nabla\cdot\vec{E})=\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\tag{5.19}$$

这就是$\vec{E}$所必须满足的方程。

若在(I)中两边取旋度，同样推得$\vec{H}$所满足的方程

$$\nabla^2\vec{H}-\nabla(\nabla\cdot\vec{H})=\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}.\tag{5.20}$$

如果我们考虑$\nabla\cdot\vec{E}=0$，又因为$\nabla\cdot\vec{H}=0$，则（5.19），(5.20)变为

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{5.19—1}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\sigma\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t^2}. \tag{5.20—1}$$

这种形式的方程称为**一般波动方程**。

但最常见的是，当$\nabla\cdot\vec{E}=0$，$\nabla\cdot\vec{H}=0$，$\sigma=0$的情形，此时（5.19)(5.20)变为

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{5.19－2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \tag{5.20—2}$$

这就是通常所说的矢量形式的波动方程。它们描述了电磁波在没有电荷又无导电介质的自由空间中传播的一般规律。

还有一种常见的情况，当$\nabla\cdot\vec{E}=0$，$\nabla\cdot\vec{H}=0$，$\sigma\neq0$，而$\vec{E}$，$\vec{H}$随时间作正弦振动，即$\vec{E}=\vec{E}_0e^{j\omega t}$，$\vec{H}=\vec{H}_0e^{j\omega t}$，其中$\vec{E}_0$，$\vec{H}_0$均与时间$t$无关，$j$为虚数单位，$\omega$为常数。在这种情况下，因为

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega\vec{E},\quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = j^2\omega^2\vec{E},$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = j\omega\vec{H},\quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = j^2\omega^2\vec{H},$$

于是方程(5.19)(5.20)变为

$$\nabla^2 \vec{E} - k\vec{E} = 0, \tag{5.19—3}$$

$$\nabla^2 \vec{H} - k\vec{H} = 0, \tag{5.20—3}$$

这就是在均匀导体介质和$\vec{E}$，$\vec{H}$随时间作正弦振动时的一般波

动方程，其中$k^2=j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)$，$k^2$称为传播系数，是电磁波传播特性的一个重要常数。若时间因子采用$e^{-j\omega t}$，显然，

$$k^2=(j\omega\mu\sigma+\mu\varepsilon\omega^2)。$$

矢量形式的波动方程，在正交曲线坐标系下，都可以表示为三个数量形式的波动方程，它们都是二阶偏微分方程。

例如方程(5.19—1)在直角坐标系下表示为

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 E_x &= \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},\\
\nabla^2 E_y &= \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},\\
\nabla^2 E_z &= \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2};
\end{aligned}
\qquad (5.19\text{—}4)
$$

在柱坐标系下，由(4.22)可表示为

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2 E_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}-\frac{E_r}{r^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2}\\
&\nabla^2 E_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}-\frac{E_\theta}{r^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2}\\
&\nabla^2 E_z=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}
\end{aligned}
\qquad (5.19\text{—}5)
$$

在球坐标系下，由(4.24)可表示为

$$\frac{1}{r}\nabla^2(rE_r)=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 E_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}-\frac{E_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi} +$$

$$\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial Er}{\partial\theta} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2}. \tag{5.19—6}$$

这样，求解时变场，研究电磁波传播的问题，就化为在给定条件下，求解波动方程问题，方程的每一个解都表示传播的波。

例5 研究波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

的解。

解 令$\xi = x - at$，$\eta = x + at$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= a\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

将上述二阶导数代入(1)式化简得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \qquad (1—2)$$

从而有 $\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$, (1—3)

其中$f(\eta)$是只依赖于η的任意二阶可微函数。从(1—3)得

$$u = \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta + f_1(\xi)$$

$$= f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

其中$f_1(\xi)$，$f_2(\eta)$是任意二阶可微的一元函数。

因此$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$ (1—4)

这就是方程(1)的通解。

通解(1—4)中，$f_1(x-at)$表示随时间t，以速度a沿X轴正向传播的波，称为右传播波。$f_2(x+at)$表示随时间t，以速度a沿X轴负向传播的波，称左传播波。所以，$u(t,x)$是由左右传播的波组成的。但是我们需要的是，求满足一定条件的特解。当$-\infty < x < +\infty$时，若给定初始条件为

$$u(x,0) = \sin x,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (1—5)$$

则从(1—4)应用(1—5)得

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$= \sin x, \qquad (1—6)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -af_1'(x) + af_2'(x)$$

$$= 0. \quad (1—7)$$

在 (1—7)中，对x积分得

$$-af_1(x) + af_2(x) = C, \quad (1—8)$$

联立(1—6)，(1—8)解得

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{c}{2a},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{c}{2a},$$

从而 $f_1(x-at) = \frac{1}{2}\sin(x-at) - \frac{c}{2a}$,

$$f_2(x+at) = \frac{1}{2}\sin(x+at) + \frac{c}{2a},$$

故方程(1)满足条件(1—5)的特解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\sin(x-at) + \sin(x+at))$$

$$= \cos at \sin x$$

这表示在任何时刻都是正弦波，只是它的振幅$\cos at$随时间t而改变。

3.2 $\vec{A}$和V的波动方程 $\vec{A}$是矢量磁位，V为电位，它们都是空间点和时间t的函数。本章§2.1，§2.2，对于静态场推导出V，V_N，$\vec{A}$均满足泊松方程或拉普拉斯方程。但对于时变场，因为麦克斯韦方程中，$\nabla\times\vec{B}$和$\nabla\times\vec{E}$均不为零，在这种情况下，$\vec{B}$和$\vec{E}$通常就不能用V和V_N推出，所以下面我们推导$\vec{A}$和V必须满足的方程。

在本章§2.2我们定义了矢量磁位$\vec{A}$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \quad (5.21)$$

上式两边对t求导数得

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\nabla\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{5.22}$$

现在定义

$$\vec{E}=-\nabla V-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{5.23}$$

这个定义是合理的，因为(5.23)两边取旋度得

$$\nabla\times\vec{E}=-\nabla\times(\nabla V)-\nabla\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

又因为任何梯度场是无旋场，即$\nabla\times(\nabla V)=0$，再由（5.21)得

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

即满足麦克斯韦方程(II)。因为静态场与时间t无关，则$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=0$，从而（5.23）变为

$$\vec{E}=-\nabla V.$$

由于(5.21)必须满足麦克斯韦方程(I)，于是在(5.21)中两边取旋度得

$$\nabla\times\vec{B}=\nabla\times\nabla\times\vec{A},$$

应用结构方程，将上式代入(I)得

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\vec{\delta}+\mu\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

再由(5.23)，(3.15)及$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$得

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{\delta}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right),$$

即可得

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu\vec{\delta}.$$

(5.24)

又由于(5.23)必须满足麦克斯韦方程(III)，由$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$，将(5.23)代入(III)得

$$\nabla \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

即

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

上式左边加减$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$得

$$\nabla^2 V - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

$$= -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{5.25}$$

由（5.21），及第三章§3.3关系（4）知，
$\nabla \cdot \vec{A}$可以任意选择，我们取

$$\nabla \cdot \vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

则（5.24），（5.25）分别变为

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{\delta}, \tag{5.24—1}$$

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{5.25—1}$$

这就是$\vec{A}$和V所必须满足的微分方程，它们都是二阶偏微分方程。

但特别重要的是，当$\vec{\delta}=0$，$\rho=0$时的情形，此时(5.24—1)(5.25—1) 变为

$$\nabla^2\vec{A}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2},\qquad(5.24—2)$$

$$\nabla^2 V=\mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\qquad(5.25—2)$$

即$\vec{A}$、V满足波动方程。它们的解表示以速度$\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$传播的波。

值得指出的是，在前面的推导中，我们多次用到第三章§3.3的关系(4)，就是说，若一个矢量为另一个矢量的旋度，如$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，则任意选择$\nabla\cdot\vec{A}$都不会影响$\vec{B}$。从前面的论述中可以看出，适当选择$\nabla\cdot\vec{A}$不单纯是数学技巧，而且根据实际问题的条件和需要，也可以达到一定的物理目的。例如，在(5.24)(5.25)中，若$\rho=0$，$\vec{\delta}=\sigma\vec{E}$，科学家们发现，当选取

$$\nabla\cdot\vec{A}+\sigma\mu V+\varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

时，则得

$$\nabla^2\vec{A}-\sigma\mu\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0,\qquad(5.24—3)$$

$$\nabla^2 V-\sigma\mu\frac{\partial V}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0,\qquad(5.25—3)$$

即，$\vec{A}$，V满足一般波动方程，方程的解表示电磁波在有耗导电介质中传播的阻尼波。

例5我们介绍了解波动方程的一种方法，下面介绍解波动方程的另一种方法——**分离变量法**。

例6　求波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (0<x<l,\ t>0) \tag{2}$$

满足下列条件的解，

(2—1)． $u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0,\qquad (t\geqslant 0)$

(2—2)． $u(x,0)=\varphi(x)$，$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=0,$

$0\leqslant x\leqslant l$ ．

其中$\varphi(x)$，Ψ为给定的已知函数。

解 设所要求的解$u(x,t)$可表示为

$$u(x,t)=X(x)T(t)\ , \tag{2—3}$$

把（2—3）代入（2）得

$$a^2T(t)X''(x)=X(x)T''(t),$$

即
$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)},$$

上式左、右两边分别只依赖于x，t，故必为常数，令

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}=-\lambda, \tag{2—4}$$

假定常数$\lambda>0$。则（2—4）可化为两个常微分方程

$$X''+\lambda X=0, \tag{2—5}$$

$$T''+a^2\lambda T=0. \tag{2—6}$$

这样，就把求解方程（2）的问题，化为求解方程（2—5），（2—6）的问题，这种方法称为分离变量法。

考察（2—5），由常微分方程的解法知，它的通解为

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x, \tag{2—7}$$

从（2—1），（2—3）得

$$u|_{x=0}=X(0)T(t)=0,$$

$$u|_{x=l}=X(l)T(t)=0,$$

但$T(t)\neq 0$，所以

$$X(0)=X(l)=0 \tag{2—8}$$

将（2—8）代入（2—7）得

$$X(0)=c_1=0, \tag{2—9}$$

$$X(l)=c_1\cos\sqrt{\lambda}l+c_2\sin\sqrt{\lambda}l=0,$$

为了使得解有意义，要求$X(x)\neq 0$就必须$c_2\neq 0$，所以，从（2—9）有

$$\sin\sqrt{\lambda}l=0,$$

故 $$\sqrt{\lambda}l=n\pi,$$

即有 $$\lambda=\frac{\pi^2 n^2}{l^2},\quad（n\text{为整数}） \tag{2—10}$$

将$c_1=0$和λ值代入（2—7）得

$$X(x)=c_2\sin\frac{n\pi x}{l}.\quad（n\text{为正整数}） \tag{2—11}$$

考察（2—6），由（2—10）得，

$$T''+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T=0,$$

其通解为

$$T(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t, \tag{2—12}$$

（A_n，B_n为任意常数）。将（2—11），（2—12）代入（2—3）得

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{2—13}$$

为满足方程（2）和（2—1)的函数，其中$a_n=c_2A_n$，$b_n=c_2B_n$

为任意常数。

为了获得方程（2），同时满足（2—1）（2—2）的特解，应用迭加原理，令

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2—14}$$

从（2—2）有

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)\ ,$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\frac{\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0\ ,$$

因此，a_n是 $\varphi(x)$在$[0,l]$上的正弦级数的福里叶系数，即

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi, \tag{2—15}$$

而 $b_n=0$,

将a_n，b_n代入（2—14）得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2—16}$$

即为方程（2）且满足（2—1）（2—2）的解。

从（2—16）可知，这个解是由正弦波

$$u_n(x,t)=a_n\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

迭加而成的。而且在任意时刻t，对于固定的n，l，正弦波只是其振幅$a_n\cos\frac{n\pi at}{l}$随时间而改变，因此，每给定一个时刻就有

一个固定的正弦波。

3.3 集肤效应与热传导方程 从电学中知道，交变电流沿导线截面的分布是极不均匀的，电流密度沿导线表面有最大值，而愈深入导线内部，其值愈小，这一现象称为集肤效应。这种现象，只要研究一下电磁波从导线周围的空间透入导线内的情况就可清楚。因为能量沿输电线导线的传输，是由在电介质中沿输电线导线传播的电磁场来实现的。而电流使导线发热而损失的能量应当看作是来自周围空间穿过导线表面而透入线内的电磁能的消耗。并且交变电磁波在深入导电介质内时逐渐衰减，而电流密度振幅，电场与磁场强度的振幅在靠近导体表面上有最大值。

本章§3.2 由麦克斯韦方程出发，推导出一般波动方程(5.19—1)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

即

$$\frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}。 \quad (5.26)$$

对于良导体，位移电流 $\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 与传导电流 $\sigma \vec{E}$ 相比较可以略去不计，即有 $\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \sigma \vec{E}$，于是(5.26)右边可近似地表示为

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma E \right) \approx \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

从而(5.26)变为

$$\frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla^2 \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

即 $$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{5.27}$$

$\left(\text{其中} c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$ 这就是集肤效应方程，是一个矢量形式的热传导（或扩散）方程。同理$\vec{H}$也满足相似的方程。这种方程的解法也有类似于例6中所述的分离变量法求解。

§4 数理方程定解问题

本章§2、§3从麦克斯韦方程出发，推得电磁场主要表征量所必须满足的方程，它们都是二阶线性常系数偏微分方程（数理方程），可归纳为下列三种类型：设u为未知函数，f为已知函数，

（1）泊松方程

$$\nabla^2 u = f(M),$$

其中 $u=u(M)$，$f=f(M)$ 均与时间t无关，仅是空间点M的函数。特别，$\nabla^2 u = 0$即为拉普拉斯方程。

（2）波动方程

$$\Box u = f(M,t),$$

其中$u=u(M,t)$，$f=f(M,t)$，$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$称为达朗贝尔（D'Alembert）算子，$a\neq 0$为常数。

（3）热传导（或扩散）方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = f(M,t),$$

其中$u=u(M,t)$，$f=f(M,t)$，$a\neq 0$为常数。

函数 f 称方程的自由项。若$f=0$，则方程称为齐次方程。含有非零自由项的方程，称为非齐次方程。

由前两节得知，电磁现象不同的表征量，具有同样形式的方程（例如，$\vec{E}$，$\vec{H}$ 满足波动方程），这反映了某些物理现象具有共同性质。因为任何物理现象都是在若干不同条件约束下运动的，从而它们又各有个性。所以，要确定某一物理过程，不仅要知道它的方程，还必须要知道所附加的条件。把这种附加条件，称为方程的定解条件。

一般，我们把求方程满足一定附加条件的解的问题，统称为定解问题。

定解条件，是由时间变量和空间变量所处的特定条件来确定的。因而定解条件，通常有两种：一种称为边界条件，就是表征量在给定区域(或范围)的边界上所处变化状态的约束条件；一种称为初始条件，就是表征量在初始时刻所处变化状态的约束条件。定解条件反映了所考察的表征量是在什么特定的条件下变化的，它的量变规律是受这些条件约束的。因此，只有方程和定解条件结合，才能具体确定一个物理过程。在实际问题中，数理方程的求解问题，就是求得一个既满足方程，又满足定解条件的函数。

定解问题，如果从时间和空间变量的观点来区分，则有三种典型的定解问题：

（1）边值问题：只有边界条件，而没有初始条件的定解问题，称为边值问题。一般可表述为

$$\begin{cases}\nabla^2 u = f(x,y,z), & (x,y,z)\in \Omega, \\ \left(k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right)_\Sigma = p_\circ\end{cases}$$

其中Σ为区域Ω的边界；$\dfrac{\partial u}{\partial n}$为函数$\Sigma$的外法方向变化率，$k$,$h$

为常数；p为边值。

（2）初值问题：只有初始条件，而没有边界条件的定解问题，称为**初值问题**。一般可表述为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=f(x,y,z,t) ,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z);\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\Box u=f(x,y,z,t) ,\\ u|_{t=0}=\varphi_1(x,y,z), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2(x,y,z);\end{cases}$$

其中$t>0$，$-\infty<x$，y，$z<+\infty$；φ；φ_1，φ_2为初值。

（3）混合问题：既有初始条件又有边界条件的定解问题，称为**混合问题**。一般可表述为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=f(x,y,z,t), t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\\ \left(k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right)_{\Sigma}=g(P), \quad t\geqslant 0;\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\Box u=f(x,y,z,t), \quad t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi_1(x,y,z) , \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2(x,y,z),\\ \left(k\dfrac{\partial u}{\partial t}+hu\right)_{\Sigma}=p(P), \quad t\geqslant 0 ;\end{cases}$$

其中 $(x,y,z)\in\Omega$，$P\in\sum$；$\varphi,\varphi_1,\varphi_2$为初值；$g$，$p$为边值；$k$，$h$为常数。

由于所述方程是线性、常系数的，这不仅反映了相应的物理现象的可迭加性、均匀性、各向同性和一定的对称性，而且

也为定解问题的求解提供了途径。我们还可以注意到，方程是二阶的，这似乎不重要，但这与方程对空间坐标的正交变换不变性有关，也与方程的分类判断、定解问题的解决有关。所述方程对于坐标平移具有不变性，而其空间部分$\nabla^2 u$对坐标旋转具有不变性，这表明不同方程所描述的各种物理现象与坐标系的选择无关，因而反映出普遍的客观属性。尽管如此，但是这些方程定解问题的提法、解的性质、时空关系是各不相同的。

前面所述三种定解问题，是场论和数学物理中的典型定解问题，也是数理方程研究的基本对象。

应该指出，定解问题仅仅是描述自然现象、物理过程的一种近似表达。因为建立实际问题的数学模型或者提出定解问题时，一般总是作一些简化或者理想化的假设，这虽然是必要的，但这样做是否能充分反映客观实际呢？当然要靠实践加以检验。然而作为数理方程的理论，就有必要研究方程解的存在性、唯一性、适定性这三个基本理论问题。解的存在性，指的是所提定解问题是否有解；解的唯一性，指的是如果定解问题有解是否只有一个；解的适定性指的是，如果一定解问题的解在某一函数类中存在、唯一且在某种意义下是稳定的。所谓解的稳定性可在不同意义下定义，是讨论若定解条件有微小改变时，解的变化情况，如果解的变化也很微小，就可说解是稳定的。解只有在稳定性的情况下才有实际应用价值。关于这些问题的进一步论述，不是本书的意图，有兴趣的读者可以参考数理方程方面的著作。

第六章　场的外微分形式

本章，以外微分形式，外微分算子为工具，使得场的量变关系的推导、表述，更加简化和统一。

§1　外微分形式

定义 1　设$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=\{F_x,F_y,F_z\}$为一矢量函数，$f=f(x,y,z)$为一标量函数；则线积分：

$$\int\vec{F}\cdot\vec{dl}=\int F_xdx+F_ydy+F_zdz$$

下的微分形式，称一级外微分形式，记作

$$\overset{dl}{\vec{F}}=F_xdx+F_ydy+F_zdz;\tag{6.1}$$

面积分：

$$\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{dS}=\int_\Sigma F_xdydz+F_ydydx+F_zdxdy$$

下的微分形式，称二级外微分形式，记作

$$\overset{ds}{\vec{F}}=F_xdydz+F_ydzdx+F_zdxdy;\tag{6.2}$$

三重积分

$$\iiint_\Omega fdV=\int_\Omega fdxdydz$$

下的微分形式，称三级外微分形式，记作

$$\overset{dV}{f} = f dxdydz \tag{6.3}$$

并规定dx,dy,dz的相乘具有反对称性，即不能随便交换位置，每交换一次位置就变一次符号；而在外微分形式中的某一项，当且仅当，出现同一微分号时为零。为运算方便，把一般标量函数，称为零级外微分形式。

例如，$dydz = -dzdy$，$dzdx = -dxdz$，$dxdy = -dydx$；

令 $dV = dxdydz$，

则 $dV = -dydxdz$，

$dV = -dxdzdy$，

$dV = dzdxdy$，

$dV = -dzdydx$，

$dV = dydzdx$；

$dxdx = 0$，

$dydy = 0$，

$dxdzdz = 0$，

$dxdydx = 0$。

性质 1 同级外微分形式相加，其和仍为同级形式，即

$$\overset{dl}{\vec{F}} + \overset{dl}{\vec{G}} = \overset{dl}{\overrightarrow{F + G}},$$

$$\overset{ds}{\vec{F}} + \overset{ds}{\vec{G}} = \overset{ds}{\overrightarrow{F + G}},$$

$$\overset{dV}{f} + \overset{dV}{\varphi} = \overset{dV}{f + \varphi}. \tag{6.4}$$

其中$\vec{G} = \vec{G}(x,y,z) = \{G_x, G_y, G_z\}$，$\varphi = \varphi(x,y,z)$。

性质 2 下列等式成立：

$$(\overset{dl}{\vec{F}})(\overset{dl}{\vec{G}}) = (\overset{ds}{\vec{F} \times \vec{G}}), \tag{6.5}$$

$$\overset{dl}{(\vec{F})}\overset{dS}{(\vec{G})}=\overset{dV}{(\vec{F}\cdot\vec{G})}. \tag{6.6}$$

$$(\eta)(\xi)=0. \tag{6.7}$$

其中η,ξ分别为k级，m级$(k,m\neq 0)$外微分形式，且$k+m>3$级。事实上

$$\begin{aligned}
\overset{dl}{(\vec{F})}\overset{dl}{(\vec{G})}&=(F_x dx+F_y dy+F_z dz)\times(G_x dx+G_y dy+G_z dz)\\
&=F_xG_y dxdy+F_xG_z dxdz+F_yG_x dydx\\
&\quad+F_yG_z dydz+F_zG_x dzdx+F_zG_y dzdy\\
&=(F_yG_z-F_zG_y)dydz+(F_zG_x-F_xG_z)dzdx\\
&\quad+(F_xG_y-F_yG_x)dxdy\\
&=\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}\\
&=\overset{dS}{(\vec{F}\times\vec{G})}.
\end{aligned}$$

同理可证(6.6)，(6.7)。

从性质 2 知，两外微分形式（不一定同一级）相乘后，并不一定提高形式的级，如(6.7)，又如，零级形式与l级形式相乘后，仍为l级形式。

性质 3 设$\vec{G}$，$\vec{F}$，C均为(x,y,z)的矢量函数，则

$$\begin{aligned}
\overset{dl}{(\vec{C})}[\overset{dl}{(\vec{G})}\overset{dl}{(\vec{G})}]&=\overset{dl}{(\vec{F})}[\overset{dl}{(\vec{G})}\overset{dl}{(\vec{C})}]\\
&=\overset{dl}{(\vec{G})}[\overset{dl}{(\vec{C})}\overset{dl}{(\vec{F})}].
\end{aligned} \tag{6.8}$$

事实上，

$$\overset{dl}{(\vec{C})}[\overset{dl}{(\vec{F})}\overset{dl}{(\vec{G})}]=\overset{dl}{(\vec{C})}\overset{dS}{(\vec{F}\times\vec{G})}=\overset{dV}{\vec{C}\cdot(\vec{F}\times\vec{G})};$$

$$\overset{dl}{(\vec{F})}[\overset{dl}{(\vec{G})}\overset{dl}{(\vec{G})}]=\overset{dl}{(\vec{F})}\overset{dS}{(\vec{G}\times C)}=\overset{dV}{\vec{F}\cdot(\vec{G}\times\vec{C})};$$

$$(\vec{G})'(\vec{C})(\vec{F})' = (\vec{G})(\vec{C}\times\vec{F}) - \vec{G}\cdot(\vec{C}\times\vec{F});$$

因为

$$\vec{C}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{F}\cdot(\vec{G}\times\vec{C}) - \vec{G}\cdot(\vec{C}\times\vec{F}),$$

故

$$\vec{C}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{F}\cdot(\vec{G}\times\vec{C}) - \vec{G}\cdot(\vec{C}\times\vec{F}),$$

从而(6.8)成立。

性质 4 下列等式成立：

$$(\vec{C})(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{C}\times(\vec{F}\times\vec{G})$$

$$-(\vec{C}\cdot\vec{G})\vec{F} - (\vec{C}\cdot\vec{F})\vec{G}. \qquad (6.9)$$

事实上，由（6.5）及关系式：

$$\vec{C}\times(\vec{F}\times\vec{G}) = (\vec{C}\cdot\vec{G})\vec{F} - (\vec{C}\cdot\vec{F})\vec{G}$$

即可得。

§2 外微分算子

定义 2 设η,ξ分别为p级，q级外微分形式，若算符d满足下列条件：

i $d(\eta+\xi) = d\eta + d\xi$;

ii $d(\eta\xi) = (d\eta)\xi + (-1)^p\eta(d\xi)$;

iii 对任何形式ω，$d(d\omega) = 0$;

iv 对零级形式 $\varphi = \varphi(x,y,z)$有

$$d\varphi = \nabla\varphi.$$

其中∇为哈密顿算子，即$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$,

则d称为**外微分算子**.

上述定义的算子d，是对三维空间(x,y,z)而言的。显然，算子d是可使微分形式升高一级的外微分运算。算子d只有作用在外微分形式上才有意义，不能与普通微分符号、算子∇混淆。

性质 1 设$\varphi=\varphi(x,y,z)$，$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$，则有下列公式

$$d\varphi=\overset{d_1}{\nabla\varphi};\tag{6.10}$$

$$d(\overset{d_1}{\vec{F}})=\overset{d_2}{\nabla\times\vec{F}};\tag{6.11}$$

$$d(\overset{d_2}{\vec{F}})=\overset{d_3}{\nabla\cdot\vec{F}};\tag{6.12}$$

$$d(\overset{d_3}{\varphi})=0.\tag{6.13}$$

证明 (6.10)即为条件iv，(6.13)显然成立。下面证(6.11)与(6.12)。

$$\begin{aligned}
d(\overset{d_1}{\vec{F}}) &= d(F_x dx+F_y dy+F_z dz)\\
&=d(F_x dx)+d(F_y dy)+d(F_z dz)\\
&=d(F_x)dx+d(F_y)dy+d(F_z)dz\\
&=(\overset{d_1}{\nabla F_x})dx+(\overset{d_1}{\nabla F_y})dy+(\overset{d_1}{\nabla F_z})dz\\
&=\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}dx+\frac{\partial F_x}{\partial y}dy+\frac{\partial F_x}{\partial z}dz\right)dx\\
&\quad+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}dx+\frac{\partial F_y}{\partial y}dy+\frac{\partial F_y}{\partial z}dz\right)dy\\
&\quad+\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}dx+\frac{\partial F_z}{\partial y}dy+\frac{\partial F_z}{\partial z}dz\right)dz\\
&=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dzdx
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \nabla \overset{dS}{\times} \vec{F},$$

即为(6.11)。

$$d(\overset{dS}{\vec{F}}) = d(F_x dydz + F_y dzdx + F_z dxdy)$$

$$= d(F_x)dydz + d(F_y)dzdx + d(F_z)dxdy$$

$$= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}dx + \frac{\partial F_x}{\partial y}dy + \frac{\partial F_x}{\partial z}dz\right)dydz$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}dx + \frac{\partial F_y}{\partial y}dy + \frac{\partial F_y}{\partial z}dz\right)dzdx$$

$$+\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}dx + \frac{\partial F_z}{\partial y}dy + \frac{\partial F_z}{\partial z}dz\right)dxdy$$

$$= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$= \nabla \overset{dV}{\cdot} \vec{F},$$

即为(6.12)。

性质 2 设η、ξ分别为p级、q级外微分形式，则当p+q<3级时，d(ηξ)可分解为p+q+1级的外微分形式的和或差，并有下列各式：

$$d(\varphi f) = (\overset{dl}{\nabla}\varphi)f + \varphi(\overset{dl}{\nabla} f), \tag{6.14}$$

$$d(\varphi \overset{dl}{\vec{F}}) = (\nabla\varphi \overset{dS}{\times} \vec{F}) + \varphi(\nabla \overset{dS}{\times} \vec{F}), \tag{6.15}$$

$$d(\varphi \overset{dS}{\vec{F}}) = (\nabla\varphi \overset{dV}{\cdot} \vec{F}) + \varphi(\nabla \overset{dV}{\cdot} \vec{F}), \tag{6.16}$$

$$d(\overset{dl}{\vec{F}}\ \overset{dl}{\vec{G}})=(\nabla\times\vec{F})\overset{dV}{\cdot}\vec{G}-\vec{F}\overset{dV}{\cdot}(\nabla\times\vec{G}). \tag{6.17}$$

而当$p+q\geqslant 3$级时，则

$$d(\eta\xi)=0. \tag{6.18}$$

其中$\varphi=\varphi(x,y,z)$，$f=f(x,y,z)$，$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$，$\vec{G}=\vec{G}(x,y,z)$。

证明 当$p+q<3$级时，$d(\eta\xi)$的分解式可从定义 2 的条件 ii,iv推得．而

$$d(\varphi f)=(d\varphi)f+\varphi(df)=(\overset{dl}{\nabla}\varphi)f+\varphi(\overset{dl}{\nabla}f)$$

即为(6.14)。

$$\begin{aligned}d(\varphi\overset{dl}{\vec{F}})&=(d\varphi)\overset{dl}{\vec{F}}+\varphi(d\overset{dl}{\vec{F}})\\&=(\overset{dl}{\nabla}\varphi)(\overset{dl}{\vec{F}})+\varphi(\overset{dS}{\nabla\times}\vec{F})\\&=\nabla\varphi\overset{dS}{\times}\vec{F}+\varphi(\overset{dS}{\nabla\times}\vec{F})\end{aligned}$$

即为(6.15)。

$$\begin{aligned}d(\varphi\overset{dS}{\vec{F}})&=(d\varphi)\overset{dS}{\vec{F}}+\varphi(d\overset{dS}{\vec{F}})\\&=(\overset{dl}{\nabla}\varphi)(\overset{dS}{\vec{F}})+\varphi(\overset{dV}{\nabla\cdot}\vec{F})\\&=(\nabla\varphi\overset{dl}{\cdot}\vec{F})+\varphi(\overset{dV}{\nabla\cdot}\vec{F})\end{aligned}$$

即为(6.16)。

$$\begin{aligned}d(\overset{dl}{\vec{F}}\ \overset{dl}{\vec{G}})&=(d\overset{dl}{\vec{F}})\overset{dl}{\vec{G}}-\vec{F}(d\overset{dl}{\vec{G}})\\&=(\overset{dS}{\nabla\times}\vec{F})(\overset{dl}{\vec{G}})-\overset{dl}{\vec{F}}(\overset{dS}{\nabla\times}\vec{G})\\&=(\nabla\times\vec{F})\overset{dV}{\cdot}\vec{G}-\vec{F}\overset{dV}{\cdot}(\nabla\times\vec{G})\end{aligned}$$

即为(6.17)。

当$p+q=2$时，容易推得(6.18)。例如，

$$d(\vec{F}\ \vec{G})=(d\vec{F})\vec{G}-\vec{F}(d\vec{G})$$

$$=(\nabla\times\vec{F})\vec{G}-(\vec{F})(\nabla\times\vec{G})=0。$$

注意，我们还可以从(6.5)、(6.6)及(6.17)，(6.18)推出公式：

$$d(\vec{F}\times\vec{G})=(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{G}-\vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})。\quad(6.19)$$

$$d(\vec{F}\cdot\vec{G})=0。\quad(6.20)$$

性质 3　设$f=f(x,y,z)$，$\varphi=\varphi(x,y,z)$，$\vec{C}=\vec{C}(x,y,z)$，$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$，$\vec{G}=\vec{G}(x,y,z)$，

则
$$d(f(\varphi))=\frac{df}{d\varphi}(\nabla\varphi)。\quad(6.21)$$

$$d\left(\frac{f}{\varphi}\right)=\frac{(\nabla f)\varphi-f(\nabla\varphi)}{\varphi^2}。\quad(6.22)$$

$$d[(\vec{C})(\vec{F}\times\vec{G})]=\vec{C}\times(\vec{F}\times\vec{G})$$

$$=(\nabla\times\vec{C})\cdot(\vec{F}\times\vec{G})$$

$$-\vec{C}\cdot[\nabla\times(\vec{F}\times\vec{G})]。\quad(6.23)$$

$$d[(\vec{C})(\vec{F})(\vec{G})]=d[\vec{C}\cdot(\vec{F}\times\vec{G})]=0。\quad(6.24)$$

其中$\frac{df}{d\varphi}$为普通导数，$\varphi\neq0$。

证明　$d(f(\varphi))=\nabla f(\varphi)$

$$= \frac{df}{d\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right]$$

$$= \frac{df}{d\varphi}\overset{d}{\nabla}\varphi,$$

即为（6.21）。

令$\psi = \frac{1}{\varphi}$，

则
$$d\left(\frac{f}{\varphi}\right) = d(f\psi)$$

$$= (df)\psi + f(d\psi)$$

$$= (\overset{d}{\nabla}f)\psi + f\overset{d}{\nabla}\psi$$

$$= (\overset{d}{\nabla}f)\frac{1}{\varphi} + f\left(-\frac{1}{\varphi^2}\overset{d}{\nabla}\varphi\right)$$

即可得（6.22）。

从（6.5）、（6.19）可推得（6.23）。从性质 2 及(6.20）可推得（6.24）。

§3 场的外微分形式

§1、§2引进了外微分形式、外微分算子的概念，并且获得了一些运算关系。本节，将使用这些概念和结果来研究场的外微分形式。

设$f = f(x,y,z)$为一数量场，$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$为一矢量场。设ω为k级外微分形式，则三种场积分可以统一为下列形式，

$$\int_\Omega \omega. \tag{6.25}$$

当$k=1$，即$\omega=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dl}$时，$\Omega$为一空间闭曲线$l$，积分表示旋转量。当$k=2$，即$\omega=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$时，$\Omega$为一空间闭（或开）曲面$\sum(\sum')$，积分表示矢通量。当$k=3$，即，$\omega=f\,dV$时$\Omega$为由$\sum$所围的空间单连通区域时，积分为三重积分。

由于场积分形式的统一，从而导致场论中一系列公式形式的统一和简化。

现将第二章§3定理2.1，定理2.2，即奥高公式，斯托克司公式表示为统一的形式：

$$\int_{\partial U}\omega=\int_U d\omega. \tag{6.26}$$

我们就称它为奥高——斯托克司公式。其中ω为k级外微分形式，∂U为区域U的边界，d为外微分算子。

在(6.26)中，当$k=1$时，则$\omega=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dl}$，$d\omega=\nabla\times\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$；$\partial U$为一空间闭曲线$l$，$U$为以$l$为边界的开曲面$\sum'$（$l$与$\sum'$保持正向联系）；此时，(6.26)即为斯托克司公式。而当$k=2$时，则$\omega=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$，$d\omega=\nabla\cdot\overrightarrow{F}\,dV$；$\partial U$为一空间闭曲面$\sum$，$U$为以$\sum$所围的单连通区域$\Omega$（$\sum$取外侧）；此时，(6.26)即为奥高公式。

下面将定理2.3，定理2.4所述的等价性条件，表示为统一的形式：

（1） $\int_U\omega=0$。

（2） $\int_{U_1}\omega=\int_{U_2}\omega$。

(3) 存在$k-1$级外微分形式ξ，使得$d\xi=\omega$。

(4) $d\omega=0$。

其中ω为k级外微分式形，d为外微分算子，U为积分(闭) 区域，U'、U''为有相同边界的开域。当$k=1$时，则$\omega=\overset{dl}{\vec{F}}$，$d\omega=\nabla\times\overset{dS}{\vec{F}}$，$\xi$为零级外微分形式，令$\xi=u(x,y,z)$；$U$为空间闭曲线，$U'$，$U''$为有相同起点和终点的开曲线；此时，条件(1)、(2)、(3)、(4)是等价的，即为定理2.4的外微分表示式。而当$k=2$时，则$\omega=\overset{dS}{\vec{F}}$，$d\omega=\overset{dS}{\vec{F}}$，$d\omega=\nabla\cdot\overset{dV}{\vec{F}}$；$U$为一闭曲面，$U'$、$U''$以同一闭曲线$l$为边界（且与$l$保持正向联系）的开曲面；此时，条件(1)、(2)、(4)是等价的，即为定理2.3的外微分表示式。但应注意，$k=2$时，并不能从条件(4)推得条件(3)。

为了将场的空间变化率表示为外微分形式，我们引进

定义 3 设$f=f(x,y,z)$为数量场，$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$为一矢量场，d为外微分算子；则df，$d\overset{dl}{\vec{F}}$，$d\overset{dS}{\vec{F}}$分别称为：f的**梯度场**，$\vec{F}$的**旋度场**，$\vec{F}$的**散度场的外微分形式**。当$d\overset{dl}{\vec{F}}=0$时，称$\vec{F}$为**无旋场**；当$d\overset{dS}{\vec{F}}=0$时，称$\vec{F}$为**无源场**（又称管量场）；当$d\overset{dl}{\vec{F}}=0$且$d\overset{dS}{\vec{F}}=0$时，称$\vec{F}$为**调和场**。

为方便起见，把$\overset{dS}{\nabla f}$称梯度场的二级形式，$\nabla\times\overset{dl}{\vec{F}}$称旋度场的一级形式，$\nabla\cdot\vec{F}$称散度场的零级形式。但以后凡说到梯度场、旋度场、散度场指的都是它们的外微分形式。

命题1 梯度场与无旋场是等价的矢量场。

证明 由定义3，$df = \overset{dl}{\nabla} f$，故

$$d(\overset{dl}{\Delta f}) = d(df) = 0 ,$$

即梯度场为无旋场。

反之，若 $\vec{F}$ 为无旋场，即$d(\overset{dl}{\vec{F}}) = 0$，于是，存在零级形式，$\varphi = \varphi(x, y, z)$，使得

$$d\varphi = \overset{dl}{\vec{F}}, \quad 即 \quad \overset{dl}{\nabla}\varphi = \overset{dl}{\vec{F}}。$$

故无旋场是一梯度场。

命题2 旋度场必为无源场。

事实上，由定义3，$d(\overset{dl}{\vec{F}}) = \nabla \overset{dS}{\times} \vec{F}$，故

$$d(\nabla \overset{dS}{\times} \vec{F}) = d(d\overset{dl}{\vec{F}}) = 0。$$

命题3 散度场的零级形式，产生一梯度场，即

$$d(\nabla \cdot \vec{F}) = \overset{dl}{\nabla}(\nabla \cdot \vec{F})。 \tag{6.27}$$

旋度场的一级形式，产生一旋度场，即

$$d(\nabla \times \overset{dl}{\vec{F}}) = \nabla \times \overset{dS}{\nabla} \times \vec{F} = \overbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}}^{dS}。 \tag{6.28}$$

梯度场的二级形式，产生一散度场，即

$$d(\overset{dS}{\nabla f}) = \overset{d}{\nabla} \cdot (\nabla f) = \overset{dl}{\nabla^2} f。 \tag{6.29}$$

其中∇^2为拉普拉斯算子。

事实上，由外微分算子d的性质，可直接推出上述结果。由§2的性质2及上述各命题，容易证明下列命题

命题4 设ξ为k级外微分形式，则

$$d(\overset{k}{\xi} \nabla f)$$

当$k=0$时，产生2级形式；当$k=1$时，除$\xi=\overset{dl}{\nabla\varphi}$使$d(\xi\overset{dl}{\nabla f})=0$外，产生3级形式；当$k\geqslant2$时为零。对于

$$d(\xi\overset{dV}{\nabla}\times\vec{F})$$

当$k=0$时，产生3级形式；当$k\geqslant1$时为零。

而
$$d(\xi\overset{dV}{\nabla}\cdot\vec{F})=0。$$

§ 4　电磁场的外微分形式

这一节将应用§1—§3的结果于电磁场理论。

设$\vec{E}$为电场强度，$\vec{H}$为磁场强度，$\vec{D}$为电位移，$\vec{B}$为磁感应强度，ρ为电荷体密度，$\vec{\delta}$为电流密度，μ,ε,σ分别表示介质的磁导率、电容率、电导率。结构方程为

$$\vec{B}=\mu\vec{H},$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},$$

$$\vec{\delta}=\sigma\vec{E}。$$

对于静电场，因为

$$\vec{E}=-\nabla V(V\text{为电位})。$$

于是，

$$\overset{dl}{\vec{E}}=-\overset{dl}{\nabla}V$$

显然

$$d(\overset{dl}{\vec{E}})=-d(dV)=0, \qquad (6.30)$$

即，$\vec{E}$为无旋的。

由高斯定律和散度定义，有

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon}\rho，\text{即}\nabla\cdot\vec{D}=\rho。$$

从而，

$$d(\overset{dS}{\vec{E}})=\overset{dV}{\nabla\cdot\vec{E}}=\frac{1}{\varepsilon}\overset{dV}{\rho}，\text{即}d(\overset{dS}{\vec{D}})=\overset{dV}{\rho}，\tag{6.31}$$

即，$\vec{E}$是一有源场．因为

$$d(\overset{dS}{\vec{E}})=-d(\overset{dS}{\nabla V})=-\overset{dV}{\nabla\cdot(\nabla V)}=-\overset{dV}{\Delta V}，$$

这样，又得到泊松方程：

$$\Delta V=-\frac{1}{\varepsilon}\rho，$$

在没有电荷（即，$\rho=0$）的区域上，则

$$\Delta V=0。$$

即拉普拉斯方程。

对于静磁场，由全电流定律和旋度定义，有

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{\delta}。$$

从而

$$d(\overset{dl}{\vec{H}})=\overset{dS}{\nabla\times\vec{H}}=\overset{dS}{\vec{\delta}}，\tag{6.32}$$

即$\vec{H}$为有旋场。显然，

$$d(\overset{dS}{\vec{\delta}})=d(d\overset{dl}{\vec{H}})=0，\tag{6.33}$$

即$\nabla\times\vec{H}$为无源场。又由

$$\int_{\Sigma}\overset{dS}{\vec{H}}=0，$$

及散度定义，有

$$\nabla\cdot\vec{H}=0，\text{即}\nabla\cdot\vec{B}=0。$$

这样又得到

$$d(\overset{dS}{\overrightarrow{H}}) = \nabla\cdot\overset{dS}{\overrightarrow{H}} = 0，\text{即}\, d(\overset{dS}{\overrightarrow{B}}) = 0. \tag{6.34}$$

即$\overrightarrow{H}$为无源场。

对于时变电磁场，在第五章§1.1中，以电荷守恒定律为基础，推出电磁场的连续性方程（5.5）：

$$\nabla\cdot\overrightarrow{\delta} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

我们可以将它写成外微分形式：

$$d(\overset{dS}{\overrightarrow{\delta}}) + \overset{dV}{\frac{\partial\rho}{\partial t}} = 0. \tag{6.35}$$

由第五章的（1），

$$\nabla\times\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\delta} + \frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}$$

其中$\dfrac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}$为马克斯威引进的位移电流。令

$$\overrightarrow{\delta}_t = \overrightarrow{\delta} + \frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t},$$

显然

$$d(\overset{dl}{\overrightarrow{H}}) = \nabla\times\overset{dS}{\overrightarrow{H}} = \overset{dS}{\overrightarrow{\delta}_t}, \tag{6.36}$$

即保持了$\overrightarrow{H}$的有旋性。对静磁场，因为

$\dfrac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t} = 0$，故（6.32）为（6.36）的特例。又由

$$d(\overset{dS}{\overrightarrow{\delta}_t}) = d(\nabla\times\overset{dS}{\overrightarrow{H}}) = d(d\overset{dl}{\overrightarrow{H}}) = 0$$

则$\nabla\times\overrightarrow{H}$是无源场。

由于法拉第实验定律可写成

$$\int_{\gamma} \overset{dl}{\vec{E}} = \int_{\Sigma} -\frac{\partial \overset{dS}{\vec{B}}}{\partial t},$$

再由（6.26）有

$$\int_{\Sigma} d(\overset{dl}{\vec{E}}) = \int_{\Sigma} -\frac{\partial \overset{dS}{\vec{B}}}{\partial t}.$$

从而有

$$d(\overset{dl}{\vec{E}}) = -\frac{\partial \overset{dS}{\vec{B}}}{\partial t}, \tag{6.37}$$

即对时变电场 $\vec{E}$ 是有旋的。因对静电场 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$，故（6.30）为（6.37）的特例。

综上所述，我们得到电磁场基本方程的外微分形式：

$$d(\overset{dl}{\vec{H}}) = \overbrace{\left(\vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)}^{dS}, \tag{I''}$$

$$d(\overset{dl}{\vec{E}}) = -\frac{\partial \overset{dS}{\vec{B}}}{\partial t}, \tag{II''}$$

$$d(\overset{dl}{\vec{D}}) = \overset{dV}{\rho}, \tag{III''}$$

$$d(\overset{dS}{\vec{B}}) = 0. \tag{IV''}$$

事实上，（I″）－（IV″）是基本方程的微分与积分的统一形式。

外国人名译名对照表

哈密顿　*Hamilton*

拉普拉斯　*Laplace*

奥斯特洛格拉斯基——高斯（简称奥高）*Ostrogradski—— Gauss*.

斯托克司　*Stokes*

高斯　*Gauss*

柯西　*Cauchy*

黎曼　*Riemann*

格林　*Green*

泊松　*Poisson*

麦克斯韦　*Maxwell*

牛顿　*Newton*

达朗贝尔　*D'Alembert*

比奥——沙伐尔　*Biot —— Savart*.